



Titre: Modèle constitutif hydromécanique tridimensionnelle pour l'analyse de stabilité des piliers d'évacuateur de crues
Title: de stabilité des piliers d'évacuateur de crues

Auteur: Constantin Lucian Stefan
Author:

Date: 2011

Type: Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

Référence: Stefan, C. L. (2011). Modèle constitutif hydromécanique tridimensionnelle pour l'analyse de stabilité des piliers d'évacuateur de crues [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal]. PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/679/>
Citation:

 **Document en libre accès dans PolyPublie**
Open Access document in PolyPublie

URL de PolyPublie: <https://publications.polymtl.ca/679/>
PolyPublie URL:

Directeurs de recherche: Pierre Léger
Advisors:

Programme: Génie civil
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

MODÈLE CONSTITUTIF HYDROMÉCANIQUE TRIDIMENSIONNEL POUR
L'ANALYSE DE STABILITÉ DES PILIERS D'ÉVACUATEUR DE CRUES

CONSTANTIN LUCIAN STEFAN
DÉPARTEMENT DES GÉNIES CIVIL, GÉOLOGIQUE ET DES MINES
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIAE DOCTOR (Ph.D.)
(GÉNIE CIVIL)
OCTOBRE 2011

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

MODÈLE CONSTITUTIF HYDROMÉCANIQUE TRIDIMENSIONNEL POUR
L'ANALYSE DE STABILITÉ DES PILIERS D'ÉVACUATEUR DE CRUES

présentée par : STEFAN Constantin Lucian

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiae Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. MASSICOTTE Bruno, Ph.D., président

M. LÉGER Pierre, Ph.D., membre et directeur de recherche

M. BOUAANANI Najib, Ph.D., membre

M. FAFARD Mario, Ph.D., membre

DÉDICACE

*à ma mère parce qu'elle n'a pas pu faire les études qu'elle méritait
mamei mele, pentru ca nu a putut sa faca scoala pe care ar fi meritat-o*

*à mon père parce qu'il est le plus droit homme que je connais
tatalui meu, pentru ca este cel mai drept om pe care il cunosc*

*à Toni parce qu'aujourd'hui c'est son anniversaire d'un an
lui Toni, pentru ca azi implineste un anisor*

*à ma très chère Ileana pour tout ce qu'il reste ...
dragei mele Ileana, pentru tot restul...*

REMERCIEMENTS

Je suis arrivé au dernier chapitre de ma thèse, au dernier et peut-être le plus important. J'ai pensé plusieurs fois à ce chapitre et maintenant je suis content de voir qu'en réalité j'ai fait le doctorat pour récompenser un peu le grand aide que j'ai reçu tout au long de ma vie. Mon doctorat représente tout ce que j'ai pu faire pour remercier à ceux qui m'ont fait constamment confiance même quand moi je ne me faisais plus, même quand l'espoir était une rencontre désirable et même quand avec tristesse je constate que ma présence était plus physique mes pensées étant perdues parmi les solutions des équations différentielles...

J'aimerais remercier premièrement les membres du jury d'avoir la patience de lire et commenter la thèse. Mes remerciements vont également aux organismes qui, tout au long de mes études, ont contribué financièrement ou techniquement à leur bon déroulement : CRSNG, FQRNT, École Polytechnique de Montréal, Hydro-Québec, CEHQ. De plus, j'ai le plaisir de mentionner les cours d'une exceptionnelle qualité des professeurs du département CGM qui ont contribué décisivement à la finalisation avec succès de mes études. Merci!

Si, am ajuns aici la ultimul capitol al tezei mele, la ultimul si poate cel mai important. M-am gandit de nenumarate ori la capitolul acesta si acum sunt multumit sa vad ca de fapt am facut doctoratul pentru a rasplati intr-o mica masura marele ajutor care l-am primit de-a lungul vietii mele. Doctoratul acesta este tot ceea ce am putut sa fac, mai mult pentru a multumi celor care au avut constant incredere in mine chiar atunci cand eu mi-am pierdut-o complet, chiar atunci cand speranta era o intalnire de dorit si chiar atunci cand cu tristete constat ca prezenta mea era mai mult fizica gandurile fiindu-mi pierdute la solutii diferentiale...

As dori sa multumesc in primul membrilor juriului pentru a fi avut rabdarea sa citeasca si sa comenteze aceasta lucrare. Multumirile mele se indreapta apoi spre organismele care pe parcursul studiilor mele au contribuit financiar sau tehnic la buna lor desfasurare: CRSNG, FQRNT, Ecole Polytechnique de Montreal, Hydro-Québec, CEHQ. De asemenea, imi face o deosebita placere sa amintesc cursurile de o exceptionala calitate ale profesorilor din departamenul de constructii care au contribuit decisiv la finalizarea cu succes a studiilor mele. Multumesc!

Même si mes études sont terminées à Montréal, c'est ma dette d'honneur de reconnaître le mérite de mes professeurs et amis, ingénieurs d'élite, de la Roumanie : Cornel Bia, Eugen Pantel, Vasile Pacurar, Victor Pantel, Mircea Petrina, Dan Sacui, Cleopatra Kovacs, Cosmin Chiorean, Ionut Moldovan, Bogdan Crisan. Les mois de discussions, critiques et contradictions avec vous ont modelé ma perception sur les constructions et ont poussé mon intérêt pour étudier de plus. Une mentionne spéciale j'adresse à Mme. Todeasa, ma professeure de mathématique de l'école à qui je suis toujours reconnaissant d'avoir découvert que j'aime les mathématiques et d'avoir su la valoriser d'une façon élégante. Merci!

Je remercie mon directeur de recherche, professeur Pierre Léger, d'une manière spéciale. La participation à vos cours, les discussions et le travail avec vous sont pour moi un honneur, une chance et un énorme plaisir. Vous avez fait que mes études soient la plus intéressante expérience technique de ma vie. Je vous remercie de m'avoir accepté comme étudiant à la maîtrise et après de m'avoir fait confiance pour le doctorat! Je vous remercie d'avoir trouvé toujours le temps pour parler avec moi, pour m'aider quand j'ai hésité et pour accepter lorsque j'ai exagéré! Je vous remercie de conseils de tous les domaines (technique, familial, personnel) que vous m'avez donnés et pour le précieux aide extraprofessionnel! Pour tout cela et pour celles dont je ne me souviens pas, je vous reste reconnaissant jusqu'à la fin de ma vie. Merci!

Chiar daca studiile mele s-au terminat la Montreal, este datorita mea de onoare sa recunosc meritul profesorilor si prietenilor mei ingineri de elita din Romania: Cornel Bia, Eugen Pantel, Vasile Pacurar, Victor Pantel, Mircea Petrina, Dan Sacui, Cleopatra Kovacs, Cosmin Chiorean, Ionut Moldovan, Bogdan Crisan. Lunile de discutii, critici si contraziceri cu voi au modelat perceptia mea asupra constructiilor si au impins dorinta mea de a afla mai mult. O mentiune speciala o adresez doamnei Todeasa profesoarei mele de matematica din scoala generala careia ii sunt mereu dator pentru a fi descoperit ca sunt atras de matematica si pentru a fi stiut intrun mod elegant sa puna in valoare acesta. Multumesc!

Conducatorul meu de doctorat, profesorului Pierre Léger ii multumesc intr-un mod special. Participarea la cursurile dvs., discutiile si lucrul cu dvs. sunt pentru mine o onoare, o sansa si o placere deosebita. Ati facut ca studiile mele de doctorat sa fie cea mai interesanta experienta tehnica din viata mea. Va multumesc pentru ca m-ati acceptat ca student de master si apoi de a-mi fi acordat incredere ca student de doctorat! Va multumesc pentru ca ati gasit intotdeauna timp sa vorbiti cu mine, sa ma ajutati cand ezitam, sa ma intelegeti cand exageram! Va multumesc pentru sfaturile din toate domeniile (tehnic, familial, personal) pe care mi le-ati dat si pentru ajutorul nepretuit din domeniul extraprofesional! Pentru toate acestea si pentru cele multe pe care nu mi le amintesc va raman dator pana la sfarsitul vietii mele. Multumesc!

Je remercie ma mère et mon père de m'avoir appris l'estime des valeurs et des principes, la verticalité morale et sociale, le respect pour la critique et le pardon et l'importance des discussions honnêtes et des arguments. Je vous remercie de m'avoir accordé le support dans toutes mes décisions qui ont été des fois bonnes, mais souvent mauvaises. Merci!

Ma chère Ileana je remercie pour tout. Elles sont très peu celles que je peux décrire ici : avoir l'idée de venir ici et m'avoir encouragé à commencer des études, ne jamais avoir douté de moi, avoir toujours offert inconditionnellement son support de continuer, savoir animer le plus insignifiant morceau de matériau, sacrifier, elle-même et notre vie, pour que je puisse continuer aux études sans jamais me la dire, être plus que j'espérais, avoir le merveilleux Toni et toutes celles qu'on les connaît, mais pour lesquelles on ne trouve pas des mots pour les exprimer... Merci de tout mon cœur, ma très chère Ileana.

Je réalise, à la fin, que je n'ai rien fait, ma seule contribution étant de mettre en ordre toute l'aide que j'ai reçue gracieusement de votre part. Je vous remercie infiniment.

Mamei mele si tatalui meu doresc sa le multumesc pentru a ma fi invatat cinstirea valorilor si principiilor, verticalitatea morala si sociala, respectul pentru critica si iertare si importanta discutiilor corecte si a argumentelor. Va multumesc pentru a-mi fi acordat suport neconditionat in toate deciziile mele multe bune si nenumarate rele. Multumesc!

Dragei mele Ileana ii multumesc pentru tot tot. Putinele pe care as putea sa le scriu aici: a avut ideea sa venim aici si m-a incurajat sa incep studiile, nu s-a indoit niciodata de mine, m-a sustinut intotdeauna neconditionat sa continui, stie la cea mai anosta bucata de material sa ii dea viata, s-a sacrificat ea si viata noastra ca eu sa pot continua la studii si nu mi-a zis niciodata aceasta, este mai mult decat as spera eu sa fie, il avem pe minunatul Toni si pentru acele nenumarate pe care le stim dar pentru care nu gasim cuvinte sa le spunem ... Multumesc din tot sufletul meu draga mea Ileana!

Imi dau seama acum la sfarsit ca eu nu am facut nimic, decat sa pun in ordine tot ajutorul pe care l-am primit de la voi. Va multumesc din toata inima mea!

AVANT-PROPOS

Cette thèse est présentée comme *thèse par article* en étant constituée de trois articles conformément avec les exigences de l'École Polytechnique de Montréal. Les articles suivants ont été soumis aux revues avec comité de lecture reconnues dans la discipline. Les trois articles sont :

- *Article 1* : Multicriteria capacity envelopes for biaxial bending of concrete hydraulic structures
- *Article 2* : Elastic sectional stress analysis of variable section piers subjected to three-dimensional loads
- *Article 3* : Three-dimensional hydromechanical sectional analysis of cracked non prismatic concrete spillway piers

RÉSUMÉ

Les ouvrages hydrauliques (OH), comme les piliers d'évacuateur de crues, sont des structures 3D soumises aux charges 3D. Une approche très convenable pour l'analyse de stabilité des OH est la "méthode de gravité" (MG). Dans sa forme classique, on cherche la réponse d'une section soumise à une charge axiale et à un moment de flexion amont-aval en supposant des contraintes normales linéaires; pour le cas général, les moments sont biaxiaux (PMM). Lors de la fissuration, les sous-pressions (SP) sont amplifiées due à l'eau en fissures. Les facteurs de sécurité au glissement (FSG) sont calculés avec le cisaillement résultant V_x , V_y et le critère de rupture Mohr-Coulomb en ignorant la torsion T (VVT). Cette thèse présente une extension originale 3D de la méthode de gravité pour sections de béton fissurées de forme arbitraire ayant une variation longitudinale arbitraire soumises aux charges 3D arbitraires (PMM-VVT). Une méthode isogonique pour la construction des diagrammes multicritère d'interaction PMM pour sections arbitraires des OH considérant les SP et les barres d'armature a été proposée. Cette méthode est spécialement conçue pour les OH et elle n'est pas trouvée dans la littérature. Afin d'évaluer la distribution des contraintes de cisaillement, on a développé un algorithme d'analyse sectionnelle basé sur la Théorie de l'Élasticité incluant la torsion Saint-Venant et non uniforme avec des éléments finis (EF) 2D. Les FSG qui tiennent compte de la torsion sont calculés à l'aide de l'intégrale des contraintes normales sur la partie non fissurée de la section où le critère de rupture Mohr-Coulomb n'est pas localement dépassé. Des exemples de validation montrent la précision des résultats du modèle par comparaison avec des analyses EF 3D pour piliers réguliers ou trapus. Si l'hypothèse de distribution linéaire des contraintes normales de flexion est appropriée, les contraintes de cisaillement sont très proches de celles de l'analyse EF 3D (différence < 1%) avec un effort de calcul beaucoup plus réduit. Pour les piliers trapus, l'intensité des contraintes montre une certaine variation, mais la distribution est très similaire à celle de l'analyse EF 3D. Le modèle proposé ayant la philosophie de la MG a une importance majeure pour la pratique parce qu'il permet d'effectuer une série d'analyses sectionnelles simplifiées, mais adéquates pour l'évaluation 3D de stabilité des OH.

Mots-clés :

Ouvrages hydrauliques, modèle tridimensionnel, méthode de gravité, analyse sectionnelle élastique, fissuration, flexion biaxiale, cisaillement biaxial, torsion, sous-pressions, section variable.

ABSTRACT

Concrete hydraulic structures (HS), such as spillway piers, are three-dimensional (3D) components subjected to 3D loads. A very convenient approach to perform stability analysis of HS is the so-called "gravity method". Its classical form leads to the solution of an axial force P and upstream/downstream bending moment M problem assuming linear normal stress distribution; in general, biaxial moments are applied (PMM). If cracking is taking place, water penetrates in cracks inducing the development of full uplift pressures. Sliding safety factors (SSF) are computed using shear force resultants V_x , V_y and a Mohr-Coulomb failure criterion ignoring torsion T (VVT). This thesis presents an original 3D extension of the gravity method for cracked concrete sections of arbitrary shape having arbitrary longitudinal variation subjected to arbitrary 3D loads (PMM-VVT). An isogonic method to construct PMM interaction curves for arbitrary cross sections of HS considering multi performance criteria, water penetration in cracks as well as the presence of reinforcing steel was proposed. This method is specifically designed for HS and it is not found in the literature. To compute the shear stress distribution, a VVT sectional analysis algorithm has been developed based on the Theory of Elasticity including Saint-Venant and warping torsional components and 2D finite elements (FE). The SSF accounting for torsion is then computed from the integration of normal stresses on the remaining uncracked area where the Mohr-Coulomb criterion was not locally exceeded. Application examples ranging from regular piers to cracked variable section squat walls are presented to illustrate its accuracy by comparing with results from full 3D FE analyses. For shear stress analysis when the assumption of linear distribution for normal flexural stress is satisfied, the proposed sectional approach produces results within 1% of 3D FE with much reduced computational efforts. For bulk and squat walls the stress field distribution are very similar to 3D FE while the stress intensity shows some variations. This is of major practical because the proposed approach allows performing first a series of simplified yet acceptable sectional analyses in safety assessment of the 3D type of structures considered herein.

Keywords:

Hydraulic structures, three-dimensional model, gravity method, elastic sectional analysis, cracking, biaxial bending, biaxial shear forces, torsion, uplift pressures, variable section.

TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE	iii
REMERCIEMENTS	iv
AVANT-PROPOS	vii
RÉSUMÉ	viii
ABSTRACT	ix
TABLE DES MATIÈRES	x
LISTE DES TABLEAUX	xiv
LISTE DES FIGURES	xv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS	xix
LISTE DES SYMBOLES	xxi
LISTE DES ANNEXES	xxiv
INTRODUCTION	1
Généralités	1
Problématique de recherche	3
Objectifs	4
Contributions originales	5
CHAPITRE 1 : REVUE CRITIQUE DE LA LITTÉRATURE	7
1.1 Introduction.....	7
1.2 Construction des diagrammes d'interaction PMM.....	7
1.3 Analyse sectionnelle des contraintes	13
1.3.1 Formulations mathématiques.....	14
1.3.2 Dimensionnalité des formulations	20
1.4 Comportement tridimensionnel des structures hydrauliques	24
CHAPITRE 2 : DÉMARCHE DE L'ENSEMBLE DU TRAVAIL DE RECHERCHE ET	

ORGANISATION DE LA THÈSE	27
2.1 Démarche de l'ensemble du travail de recherche	27
2.2 Organisation de la thèse	28
CHAPITRE 3 : ARTICLE 1 : MULTICRITERIA CAPACITY ENVELOPES FOR BIAXIAL BENDING OF CONCRETE HYDRAULIC STRUCTURES	29
3.1 Introduction.....	29
3.2 PMM Capacity Envelopes for Hydraulic Structures.....	32
3.2.1 Section Characteristics.....	32
3.2.2 Loading Combinations and Performance Indicators.....	33
3.3 Generation of Multi-Criteria PMM Capacity Envelopes	33
3.3.1 Isogonic Approach.....	34
3.3.2 Consideration of Structural Performance Indicators.....	37
3.3.3 Consideration of Uplift Pressures	38
3.4 Validation Examples.....	41
3.4.1 Plain Concrete Section.....	41
3.4.2 Reinforced Concrete Section	41
3.4.3 Powerhouse Section.....	43
3.4.4 Reinforced Spillway Pier Section	43
3.5 Summary and Conclusions	43
3.6 Acknowledgments	44
3.7 References.....	44
CHAPITRE 4 : ARTICLE 2 : ELASTIC SECTIONAL STRESS ANALYSIS OF VARIABLE SECTION PIERS SUBJECTED TO THREE-DIMENSIONAL LOADS	47
4.1 Introduction.....	47
4.1.1 Review of previous work.....	48
4.2 Problem formulation and solution strategy.....	49
4.2.1 Geometry and notations	51
4.2.2 Strong form for shear without torsion.....	53
4.2.3 Limit boundary conditions.....	54
4.2.4 Torsion due to section variability	56
4.2.5 Uniform and non-uniform torsion considerations	57
4.2.6 Computation of related quantities.....	58

4.2.6.1 Stress resultants	58
4.2.6.2 Determination of normal stresses σ_x and σ_y	58
4.2.7 Finite element formulation	59
4.3 The case of rectangular sections	60
4.3.1 Section subjected to P - V_x - M_y	61
4.3.2 Consideration of three-dimensional loads	62
4.4 Applications	62
4.4.1 Rectangular section pier with a single sloped boundary	63
4.4.2 Influence of Poisson ratio	63
4.4.3 Rectangular section buttress with unsymmetrical slopes	67
4.4.4 Pier (squat wall) for hydraulic structures	67
4.5 Summary and conclusions	68
4.6 Acknowledgements	69
4.7 References	69
4.8 Appendices	73
4.8.1 Appendix A	73
4.8.2 Appendix B	74
4.9 List of key symbols	74

CHAPITRE 5 : ARTICLE 3 : THREE-DIMENSIONAL HYDROMECHANICAL SECTIONAL ANALYSIS OF CRACKED NON PRISMATIC CONCRETE SPILLWAY PIERS

5.1 Introduction	77
5.2 Problem statement	79
5.2.1 Model description	80
5.3 Hydromechanical cracking analysis (PMM)	80
5.3.1 Neutral axes and normal stresses evaluations	81
5.4 Shear stresses from biaxial shear loads (VV)	81
5.4.1 Strong form and finite element implementation	81
5.4.2 Three-dimensional boundary conditions	82
5.4.3 Equilibrium check	83
5.5 Stresses from pure torsion (T)	83
5.5.1 Solution strategy	84
5.5.2 Twist angle computation	85

5.5.3 Equilibrium check.....	85
5.5.4 Discussion on torsion formulation for variable section elements.....	86
5.6 Application examples	86
5.6.1 Column with three-dimensional section variability.....	87
5.6.2 U-shaped variable section column.....	88
5.6.3 Cracked concrete spillway pier.....	89
5.6.3.1 Neutral axis along strong bending axis	89
5.6.3.2 Arbitrary neutral axis.....	89
5.7 Summary and conclusions	91
5.8 Acknowledgments	92
5.9 References.....	93
CHAPITRE 6 : DISCUSSIONS ET CONSIDÉRATIONS COMPLÉMENTAIRES.....	96
6.1 Points caractéristiques des courbes PM ($\alpha = \text{constant}$)	96
6.2 Aspects complémentaires de l'influence des sous-pressions sur l'analyse PMM.....	98
6.2.1 Techniques d'actualisation des SP	98
6.2.2 Caractéristiques des diagrammes <i>PMMa</i>	99
6.2.3 Interprétation et utilisation des diagrammes <i>PMMa</i>	101
6.3 Règles pour la génération des diagrammes PMM avec le critère d'aire fissurée	101
6.4 Effet de la torsion gauche pour les piliers d'évacuateurs de crues	103
6.5 Discussion sur le centre de cisaillement et le centre de torsion	106
6.6 Évaluation apriori des résultantes pour cisaillement pur des sections variables.....	110
6.7 Formulation suggérée pour torsion non uniforme des éléments à section variable	110
6.7.1 Vérification de l'équilibre externe	111
CHAPITRE 7 : DISCUSSION GÉNÉRALE.....	112
CONCLUSIONS, RECOMMANDATIONS ET PERSPECTIVES	115
RÉFÉRENCES	118
ANNEXES.....	125

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	Caractéristiques principales des méthodes de construction des diagrammes PMM	10
Tableau 1.1	Caractéristiques principales des méthodes de construction des diagrammes PMM (suite)	11
Tableau 1.2	Combinaisons de charges : ouvrages hydrauliques de type poids (Miron 1997).....	25
Table 3.1	Performance Indicators for Hydraulic Structures	30
Tableau 6.1	Points caractéristiques de la courbe PM	96
Tableau 6.2	Particularités des parties de <i>PMMa</i>	100
Tableau 6.3	Valeurs des coefficients β et δ pour le calcul des constantes J et C_w	103
Tableau A.1	Points $P1$, $P2$, $P3$ (cas θ , d , et ε_e)	127
Tableau A.2	Coefficients m et n (cas θ , ε_o , et ψ)	128
Tableau A.3	Fonction $f(P, M)$ pour une section rectangulaire non armée.....	129
Table B.1.1	Progressive approach for seismic stability	135
Table B.1.2	Method comparisons for base joint.....	146
Table B.1.3	Method comparisons for joint +90 m	147
Table B.2.1	Progressive approach for seismic stability	151
Table B.2.2	Dynamic characteristic of models $M2c$ and $M2d$	155
Table B.2.3	Base shear forces, V_{max} , for the pseudo-static, pseudo-dynamic, spectral and linear time-history analyses (Westergaard masses on gates).	156
Table B.2.4	Influence of Westergaard added mass on gates for pier response: linear time-history analysis (model $M2d$ vs $M2c$).	156
Table B.2.5	Frequencies and added masses for the models studied.....	158

LISTE DES FIGURES

Fig. I.1	Structures hydrauliques : (a) exemple; (b) et (c) structures endommagées.	2
Fig. I.2	Modèle de calcul : (a) conceptuel; (b) méthode de gravité; (c) méthode des éléments finis.	3
Fig. 1.1	Construction des diagrammes PMM : (a) techniques de construction; (b) notations; et (c) situations qui peuvent générer des difficultés de convergence (critère : aire fissurée max).....	8
Fig. 1.2	Formulations pour résoudre le problème générale de la TE (adapté de Dufour 2008).....	16
Fig. 1.3	Logiciel d'analyse basé sur la méthode de gravité, CADAM-3D (Leclerc et Léger 2011).....	24
Fig. 3.1	Stability evaluation and rehabilitation of hydraulic structures: (a) structure to be analyzed; (b) sectional structural model; and (c) rehabilitated structure	30
Fig. 3.2	Techniques to generate PMM envelopes: (a) computational model; (b) sample points on PMM surface; (c-e) translations along P , M_x , M_y axis; (f-h) rotations around P , M_x , M_y axis; and (i) isogonic approach.....	31
Fig. 3.3	PMM envelope generation using the isogonic approach: (a) model and notations; (b) isogonion corresponding to no-planar curves for constant θ ; and (c) MM load contour for cst. P	34
Fig. 3.4	Generation of multi-criteria PMM diagram.....	35
Fig. 3.5	Search algorithm to compute the NA position for a section subjected to biaxial flexion (<i>GeomSearch</i>).....	36
Fig. 3.6	PMM envelope considering UP: (a) envelope generation method; and (b) example of UP distribution	40
Fig. 3.7	Validation examples: (a) PMM and $PMMa$ envelope for plain concrete section (UP effect); (b) MM load contours for reinforced concrete section with the cracked area criterion; (c) three-dimensional envelope for powerhouse section; and (d) $PMMa$ envelope for reinforced spillway pier (UP effect)	42
Fig. 4.1	Structural elements with variable sections made of (a) wood, (b) steel, and (c) reinforced concrete; (d1) unit slice of a concrete dam, and (d2) spillway pier.	48
Fig. 4.2	Geometry and notations: (a) 3D view; (b) notation for boundary conditions (linear slope variation): (b1) vertical cut, (b2) reference section, and (b3) relationship	

	between surface \vec{n}_s and curve \vec{n} outside unit normal.	51
Fig. 4.3	Algorithm to compute, for structural elements with variable section, the shear stresses due to three-dimensional loads.	52
Fig. 4.4	Rectangular section pier with a single sloped boundary: (a) geometry and notations, and structural response for applied forces (b) $V_x = 100$ kN, (c) $V_y = 100$ kN, and (d) $P = -2000$ kN, $e_x = 0.1$ m, $e_y = 0.05$ m.	64
Fig. 4.5	Concrete buttress (unsymmetrical boundary conditions): (a) geometry and notations, and structural response for applied forces (b) $V_x = 1000$ kN, (c) $V_y = 1000$ kN, and (d) $P = -1000$ kN, $e_x = 1$ m, $e_y = 1$ m.	65
Fig. 4.6	Pier (squat wall) for hydraulic structures: (a) geometry and notations, and structural response for applied forces (b) $V_x = 1000$ kN, (c) $V_y = 1000$ kN, and (d) $P = -1000$ kN, $e_x = 1$ m, $e_y = 1$ m.	66
Fig. 4.7	On-height variation for torsion analysis variables: (a) torsion constant J , (b) warping constant C_w , (c) shear center, (d) twist angle, and (e) resistant (T_{sv} , T_w) and applied torsion (T_{tot}) for load case $V_y = 1000$ kN of example 3.	68
Fig. 5.1	Models for stability analysis of concrete spillway piers: (a) typical "gravity method"; (b) dedicated software (CADAM-3D); and (c) general finite element program, model with 57191 nodes (SAP 2000 ®)	78
Fig. 5.2	Geometry and notations: (a) 3D view; (b) analyzed section	80
Fig. 5.3	Pier with triangular cross-section: (a) model description; and structural responses for applied forces (b) V_x , (c) V_y , and (d) P , e_x , e_y	87
Fig. 5.4	Pier with U-shaped cross-section: (a) model description; and structural responses for applied forces (b) V_x , (c) V_y , and (d) T	88
Fig. 5.5	Cracked spillway pier subjected to three-dimensional loads: (a) model description; and structural responses for neutral axis along the strong bending axis (b) and for arbitrary neutral axis position (c).....	90
Fig. 5.6	Sliding safety factors (SSF): (a) local SSF isolines; (b) global SSF_T evaluation strategy; and (c) sliding tendency	91
Fig. 6.1	Points caractéristiques des courbes PM : (a) courbe; et (b) l'évolution de ε	97
Fig. 6.2	Caractéristiques des diagrammes $PMMa$: (a) diagramme $PMMa$; (b) distribution de SP	99
Fig. 6.3	Considération du critère d'aire fissurée : (a) courbe PMM; contour MM pour une charge axiale de compression (b) et de tension (c)	102
Fig. 6.4	Définition des variables pour la section rectangulaire soumise à la torsion	104

Fig. 6.5	Variation de la torsion gauche T_w en fonction du facteur de forme χ	104
Fig. 6.6	Variation de L/b en fonction de la position z/L sur la poutre pour divers rapports b/a	105
Fig. 6.7	Mécanismes pour produire et résister la torsion pour les sections constantes et variables (d_{gp} = distance entre le centroïde de la section où V est appliquée et celui de la section analysée)	108
Fig. 7.1	Approche progressive de l'analyse de stabilité d'une structure hydraulique.....	113
Fig. A.1	Notations (cas θ , d , et ε_c)	127
Fig. A.2	Notations (cas θ , ε_o , et ψ)	128
Fig. A.3	Section analysée : (a) $y_{AN} < 0$; (b) $y_{AN} \geq 0$; et (c) $y_{AN} \geq 0$ et influence de SP	128
Fig. B.1.1	Spillway pier subjected to seismic loads	134
Fig. B.1.2	3D extension of the gravity method.....	136
Fig. B.1.3	3D Seismic stability evaluation using linear dynamic transient analysis	138
Fig. B.1.4	Analyzed spillway	140
Fig. B.1.5	Ground motions	141
Fig. B.1.6	CADAM-3D Pseudo-static and pseudo-dynamic model.....	142
Fig. B.1.7	Correlation between the eccentricities and the uncracked area	144
Fig. B.1.8	Earthquake post-processor response analyses for base joint	145
Fig. B.1.9	Earthquake post-processor response analyses for joint +90m	146
Fig. B.2.1	Analyzed gated spillway.....	153
Fig. B.2.2	Models for analyzed spillway: (a) $M1$: one pier, and (b) $M2$: three piers with two gates.....	153
Fig. B.2.3	Mode shapes of the pier (model $M1c$)	154
Fig. B.2.4	Mode shapes of the spillway (model $M2d$).....	154
Fig. B.2.5	Acceleration response spectrum for 5% damping	156
Fig. B.2.6	Finite element model of the wall-gate-reservoir system used for FSI analysis	157
Fig. B.3.1	Flexural analysis for dams: (a) computational model, and (b) sectional analysis	162
Fig. B.3.2	Response of unreinforced (a), and reinforced (b) section, and stress variation (c) for different eccentricities	162
Fig. B.3.3	Failure mechanism and shear response of anchors: (a) anchor cross-section, (b) failure mechanism by tension (b1), material crushing (b2), and tensile-shear interaction (b3), and (c) shear-displacement response of typical anchor.....	163
Fig. B.3.4	Computational tool GM-Dam: (a) variation of equilibrium equations, and (b) spreadsheet preview.....	170
Fig. B.3.5	Application example: (a) analyzed dam, (b) section response for operating level	

(OL) and flood level (FL); and GM-Dam computation for unreinforced (c1) and reinforced (c2) section for FL load case	171
--	-----

LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

Sigles

ACB / CDA	=	Association Canadienne des Barrages / Canadian Dam Association
CEHQ	=	Centre d'Expertise Hydrique du Québec
FERC	=	Federal Energy Regulatory Commission
HQ	=	Hydro-Québec
USACE	=	United States Army Corps of Engineers
USBR	=	United States Bureau of Reclamation
VBA	=	Visual Basic for Application

Abréviations

3D, 2D, 1D	=	dimensionnalité spatiale : 3, 2 ou 1 dimension
AEF (FEA)	=	Analyse par Éléments Finis (Finite Element Analysis)
AN (NA)	=	Axe Neutre (Neutral Axis)
BAV	=	Boundary Analytical Value
BEM	=	Boundary Element Method
b.a.	=	béton armé
CA (WSD)	=	calcul aux Contraintes Admissibles (Working Stress Design)
CC (SC)	=	Centre de Cisaillement (Shear Center)
CF	=	Conditions Frontières
CT (TC)	=	Centre de torsion (Torsional Center)
cMM	=	contours MM (voir ci-dessous pour la définition de MM)
DDL (DOF)	=	Dégré De Liberté (Degree Of Freedom)
ED	=	Équation Différentielle
EF (FE)	=	Éléments Finis (Finite Element)
ELU (UD)	=	calcul aux États Limites Ultimes (Ultimate Design)
EP	=	Énergie Potentielle
FC	=	Formulation intégrale de frontière (Contour)
FD	=	Formulation Forte
FF	=	Formulation Faible
FI	=	Formulation Intégrale pondérée
FM	=	Formulation de Minimisation

FSG (SSF)	= Facteur de Sécurité au Glissement (Sliding safety factor)
FV	= Formulation Variationnelle
gPM	= courbe d'interaction PM (voir ci-dessous pour la définition de PM)
MEF (FEM)	= Méthode des Éléments Finis (Finite Element Method)
MG (GM)	= Méthode de Gravité (Gravity Method)
OH (HS)	= Ouvrages Hydrauliques (Hydraulic Structures)
PMMa	= diagramme PMM pour les forces appliquées (les sous-pressions actualisées sont considérées intrinsèquement par ce diagramme)
PMMk	= diagramme PMMa tracé pour le critère de l'airé fissurée maximale
PMMVVT	= P - M_x - M_y - V_x - V_y - T chaque lettre étant associé avec une force/moment dans la direction correspondante (d'autres combinaisons sont possibles : PM, PMM, MM, VV, VVT, ... mais la logique de notation demeure uniforme)
RS (SR)	= Reinforced sections (sections renforcées)
SH (HS)	= Structures Hydrauliques (Hydraulic Structures)
SP (UP)	= Sous-Pressions (Uplift Pressure)
SV	= Saint-Venant (torsion)
TE	= Théorie de l'Élasticité (Theory of Elasticity)
TV	= Travail Virtuel
W	= Warping (torsion)
XFEM	= Extended Finite Element Method

LISTE DES SYMBOLES

Cette liste fournit les symboles importants qui se trouvent dans la thèse à plusieurs endroits (plus qu'une seule fois). Les autres symboles sont définis et utilisés localement. Pour plus de détails sur certains symboles le lecteur est invité à consulter les Figs. : 3.3, 3.4, 3.6, 4.2, 5.2, 6.1, 6.2, 6.3.

A	=	aire de la section
A_c	=	aire comprimée de la section
A_{crk}	=	aire fissurée (en général pour le diagramme multicritère)
A_g	=	aire pleine de la section
A_s	=	aire d'acier d'armature
a, b, c, d	=	coefficients de l'équation d'un plan ou d'une droite
	=	d représente aussi la distance entre l'origine et une droite arbitraire
$b (b_s), h (h_s)$	=	dimensions d'une section (rectangulaire), la plus petite et la plus grande
C, G	=	centroïde de la section initiale
C_w	=	constante de gauchissement
c	=	cohésion du matériau
E, G, ν	=	module de Young et de cisaillement, coefficient de Poisson
e_x, e_y	=	excentricités de la charge N ou P par rapport à un système de référence Oxy selon l'axe x ou y
$f_{ij}, h_v, h_{nx}, h_{ny}$	=	fonctions du membre droit pour la formulation de cisaillement pur définies en détail dans les chapitres 4 et 5
f'_c	=	résistance en compression de la section
f'_t	=	résistance en traction de la section
I_x, I_y	=	moment d'inertie de la section par rapport à l'axe Ox ou Oy
I_{xy}	=	produit d'inertie par rapport au plan Oxy
J	=	constante de torsion
L	=	longueur / hauteur de l'élément
L_n	=	longueur de la normale extérieure du contour de la section analysée Γ
L_{ns}	=	longueur de la normale extérieure 3D de la surface Ω
L_s	=	position de la section de référence
l, m, n	=	composantes x, y , and z de la normale extérieure \vec{n} du contour de la section

analysée Γ

l_s, m_s, n_s	= composantes x, y , and z de la normale extérieure \vec{n}_s 3D de la surface Ω
M	= moment de flexion par rapport à l'axe Ox ou Oy (notation générique)
M_x	= moment de flexion par rapport à l'axe Ox
M_y	= moment de flexion par rapport à l'axe Oy
$M_{x\ UP}, M_{y\ UP}$	= moments de flexions résultants des sous-pressions
n_i	= facteur d'équivalence pour les modules de Young (section multi-matériaux)
O	= origine d'un système cartésien d'axes $Oxyz$
Ox, Oy, Oz	= axe du système cartésien $Oxyz$
P	= charge axiale appliquée sur la section (notation générique)
$-RM_x, RM_y$	= moments résultants totaux dans la direction x et y direction
R_{UP}	= résultante axiale des sous-pressions
R_{UPex}, R_{UPey}	= excentricités de la résultante des sous-pressions par rapport au système de référence centroïdal selon l'axe x ou y
T	= moment de torsion
T_B	= torsion due à la différence entre le centroïde et le centre de cisaillement
T_r	= période de retour pour sollicitations exceptionnelles (e.g., séisme)
T_{SV}	= torsion Saint-Venant (l'indice $_{sv}$ est utilisé pour "Saint-Venant")
T_{tot}	= torsion totale
T_W	= torsion gauche (l'indice $_w$ est utilisé pour la torsion "gauche")
u, u'	= fonction inconnue générique dans une équation différentielle
u, v, w	= déplacements dans la direction x, y , et z
V	= effort tranchant par rapport à l'axe Ox ou Oy (notation générique)
V_x	= effort tranchant par rapport à l'axe Ox
V_y	= effort tranchant par rapport à l'axe Oy
v	= fonction arbitraire générique de test pour une formulation variationnelle ou intégrale pondérée
x, y, z	= coordonnée générique "x", "y", "z"
x_{Dv}, y_{Dv}	= coordonnées du centre de cisaillement de la section variable
x_g, y_g	= coordonnées du centroïde d'une section
x_{gP}, y_{gP}	= coordonnées du centroïde de la section où la charge axiale est appliquée
x_u, x_d, y_b, y_t	= courbe ouverte qui limite la section analysée "à gauche", "à droite", "en bas", "en haut"
y_{AN}	= coordonnée y de l'axe neutre quand elle est parallèle à l'axe Oy

Γ	= courbe fermée définissant la section analysée; les indices additionnels $_u$ et $_d$ sont pour amont/aval ou gauche/droite
$\Psi, \Psi_S, \phi, \phi_S$	= fonctions de gauchissement 2D pour torsion pure : la fonction primaire et secondaire (les deux notations sont équivalente)
Ω	= surface 3D extérieure définissant l'élément analysé et ayant l'équation $F_1(x, y) + F_2(z) = 0$ ou $F(x, y) = 0$ avec F_1, F_2 étant des fonctions arbitraires; les indices additionnels $_u$ et $_d$ sont pour amont/aval ou gauche/droite
α	= angle du moment résultant
α_u, α_d	= angle entre la normale extérieure des plans en amont/aval et l'horizontale
β	= coefficient pour le calcul de la constante de torsion des sections rectangulaires
χ	= facteur de forme pour la torsion gauche
δ	= coefficient pour le calcul de la constante de gauchissement des sections rectangulaires
δv	= incrément/variation d'une fonction arbitraire (pour le calcul de variations)
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	= déformation axiales dans la direction x, y et z
ϕ	= coefficient de friction (angle de friction) = fonction de contrainte pour la torsion de la section rectangulaire
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	= déformation de cisaillement selon les plans xy, xz , et yz .
η	= fonction de gauchissement 2D pour le calcul des contraintes normales σ_x, σ_y
π	= énergie potentielle totale
θ	= angle de l'axe neutre = angle de rotation pour la torsion
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	= contraintes normales dans la direction x, y et z ; les indices additionnels $_B$ et $_W$ sont pour "flexion" et "gauchissement"
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	= contraintes de cisaillement dans les plans xy, xz , et yz ; les indices additionnels $_S, _{SV}, _W, _T$ sont "cisaillement", "Saint-Venant", "gauchissement" et "total"
ψ, ψ_G	= fonctions de gauchissement 2D pour cisaillement pur ($\psi_G = \psi \cdot G$) = courbure = fonction de gauchissement pour la torsion de la section rectangulaire

LISTE DES ANNEXES

ANNEXE A : DÉMONSTRATIONS DES FORMULES DES ARTICLES	125
ANNEXE B : ARTICLES COMPLÉMENTAIRES PUBLIÉS	133

INTRODUCTION

Généralités

Les structures hydrauliques (SH) en béton sont des structures essentielles pour la production d'électricité au Québec et au monde parce que la production est une de plus propre et verte, elles ont une durée de vie importante, elles offrent une composante récréative, etc. La sécurité des SH est une préoccupation majeure et actuelle des spécialistes de plusieurs domaines et aussi des propriétaires de ces structures à cause des implications socioéconomiques et de l'ampleur de dommages en cas d'accident (Hydro-Québec, Centre d'expertise hydrique du Québec). Comme la majorité de structures sont vieillissantes et souvent endommagées (Fig. I.1) cette préoccupation devient encore plus grande. La rupture d'un barrage ou même d'une de ces parties peut provoquer des pertes importantes de vies humaines et des préjudices économiques. Les organismes nationaux de contrôle, dans la plupart de pays au monde (CDA 2007, FERC 2002), exigent des propriétaires des règles de plus en plus strictes en ce qui concerne la sécurité d'exploitation des ouvrages hydrauliques et leur comportement sous sollicitations extrêmes afin d'éviter tout accident (Marche 2004). Les coûts des réparations étant très grands, il y a un fort intérêt à trouver des méthodes qui évaluent adéquatement (a) la résistance résiduelle afin de poser de bon diagnostic de ces ouvrages et (b) les méthodes de réhabilitation efficaces pour prolonger leur durée de vie utile.

Les structures hydrauliques en béton massif/non armé (Fig. I.1) représentent une proportion importante des ouvrages hydrauliques (OH). L'évaluation de la sécurité de ces structures est un défi important d'ingénierie à cause de plusieurs phénomènes qui y sont compris et qui produisent des états de contraintes complexes pouvant induire des fissures. On peut diviser les aspects reliés dans trois classes principales : (1) ceux attachés à la section et aux matériaux; (2) ceux attachés aux charges et (3) ceux attachés au comportement. Dans la première classe, on retrouve les particularités liées : à la section (structures massives/trapues, sections longues/variables et souvent endommagées, présence de coursier, fondations inclinées, plusieurs mécanismes de défaillance), aux méthodes de construction (joints et discontinuités complexes, phases de construction, clés de cisaillement) et aux caractéristiques de matériau (résistance limitée à la traction, faible présence d'armatures). La deuxième comprend : les effets statiques et dynamiques du réservoir, les sous-pressions (SP ou UP), les effets de la glace (pression et impact), les séismes, l'effet de la température, l'attaque chimique (réactions alcalis-granulats, sulfates, etc.), le comportement différé du béton (fluage, retrait), l'interaction 3D des charges P - M_x - M_y - V_x - V_y - T (PMMVVT). La troisième réunit : les mécanismes de défaillance (glissement, renversement, fissuration

excessive, etc.), et les systèmes complexes d'interaction structure-réservoir-glace-fondation. Parmi ces charges, peut-être les plus difficiles à considérer sont celles qui produisent une fissuration oblique : glace, séismes, charges non symétriques ou charges symétriques sur sections non symétriques.

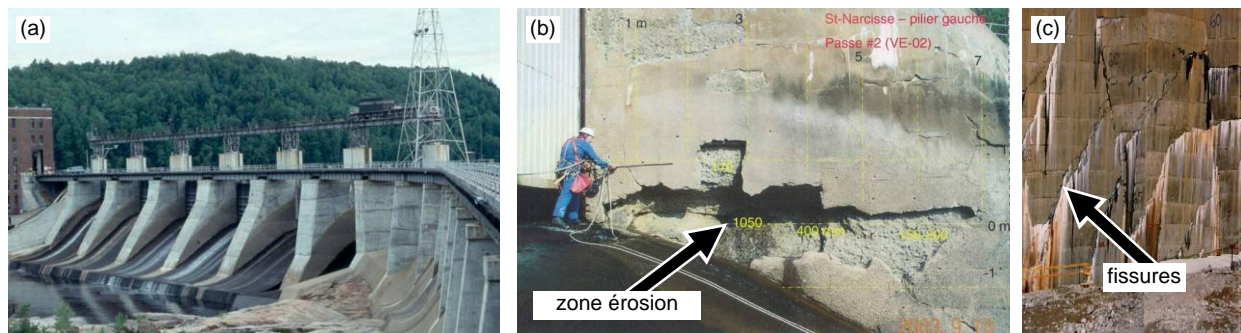


Fig. I.1 Structures hydrauliques : (a) exemple; (b) et (c) structures endommagées.

Afin d'évaluer la stabilité d'un OH on utilise principalement deux méthodes (Fig. I.2) : la méthode de gravité (MG) et la méthode des éléments finis (MEF) qui, à son tour, peut être basée sur la théorie de l'élasticité/plasticité ou sur la mécanique de la rupture. La MG est une méthode simplifiée qui est recommandée par les normes (CDA 2007, FERC 2002) comme approche globale de vérification de l'équilibre; avec la MG on peut tenir compte des sous-pressions. La MEF est une méthode d'analyse 3D, mais elle nécessite des utilisateurs très spécialisés (pour concevoir le modèle et pour interpréter les résultats) et modélise difficilement les effets hydromécaniques couplés (les sous-pressions pénétrant dans les fissures). La MG est utilisée pour l'évaluation de la stabilité des structures existantes et dans les "avant-projets" des nouveaux aménagements afin de trouver la solution et les coûts optimaux. Elle est très appropriée pour l'analyse hydromécanique globale d'équilibre, mais elle a des difficultés (a) à déterminer les contraintes dues à la torsion et à l'effort tranchant et leur l'interaction, (b) à quantifier les fissures qui s'amorcent à un joint de reprise de bétonnage puis qui plongent dans la structure et (c) à représenter l'interaction structure-réservoir-fondation.

Il y a la nécessité de développer des méthodes robustes d'analyse de stabilité avec la philosophie de la MG, mais qui répondent à ces insuffisances. Une telle méthode évite les complications de modélisation/interprétation qui surviennent lors de l'analyse par EF, tout en obtenant une précision convenable. Les facteurs de sécurité (au glissement=FSG) sont définis dans les guides de sécurité des barrages sur la base d'analyse par la MG. L'analyse par EF devient alors complémentaire à cette méthode surtout quand le calcul d'un champ de contraintes local est nécessaire.

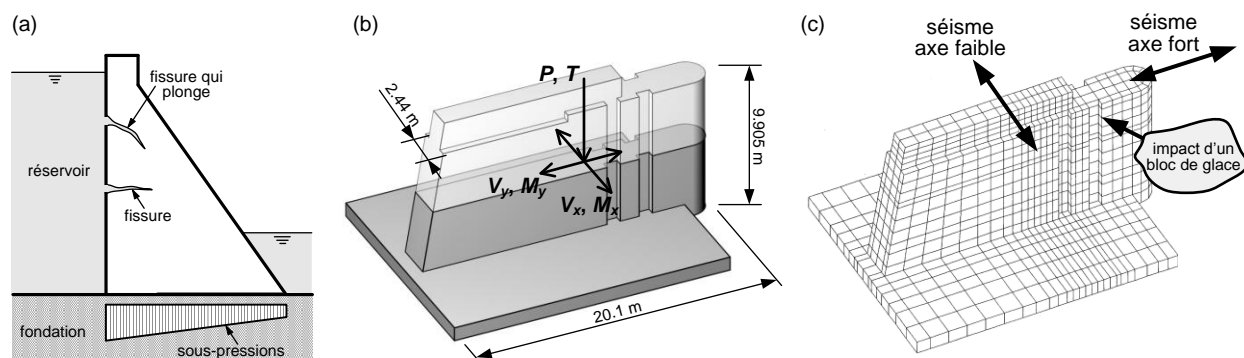


Fig. I.2 Modèle de calcul : (a) conceptuel; (b) méthode de gravité; (c) méthode des éléments finis.

Problématique de recherche

La méthode classique de gravité (MG) a été conçue comme une méthode d'analyse globale de stabilité pour des charges qui agissent dans une seule direction : amont/aval (Watermeyer 2006, Leclerc et Léger 2011). Dès qu'on ajoute une sollicitation oblique (cisaillement biaxial, torsion) on a des difficultés à quantifier la réponse de la structure. D'autre part, on préfère la méthode de gravité pour l'analyse hydromécanique des structures hydrauliques grâce à deux caractéristiques essentielles dans le monde de l'analyse numérique non linéaire : accessibilité et robustesse (même dans le contexte hydromécanique).

Conséquemment, on aura besoin d'un modèle d'analyse qui peut évaluer adéquatement la sécurité des OH qui sont tridimensionnelles (3D) soumises aux charges 3D. On pourrait voir ce modèle comme une extension 3D de la MG, mais cette observation est valide seulement dans le sens où on respecte sa philosophie. Pour éliminer ses lacunes, on va se référer aux théories plus complexes, comme celle de la Théorie de l'Élasticité (TE) et la mécanique des milieux fissurés. Un tel modèle d'analyse hydromécanique 3D doit pouvoir évaluer avec robustesse et facilité d'interprétation la sécurité structurale d'un ouvrage hydraulique, quantifier sa résistance résiduelle, poser un diagnostic pour procéder aux réparations.

Un des buts principaux de l'analyse de stabilité est de trouver l'aire fissurée le long d'un plan de faiblesse préalablement identifié pour une section soumise aux charges 3D. On a besoin de la distribution des contraintes de cisaillement sur cette aire pour pouvoir quantifier : (a) la perte de cohésion par contraintes excessives de cisaillement; (b) la possibilité que les fissures plongent dans la structure (Fig. I.2); (c) l'évaluation des indicateurs de la stabilité structurale (i.e., FSG). Le modèle doit fournir des formules pour les FSG qui tiennent compte de sollicitations 3D, incluant la torsion. En plus de ces difficultés, il y en a d'autres qui s'ajoutent lors d'une analyse 3D (PMMVVT) de stabilité des structures hydrauliques, avec l'effet des sous-pressions :

- pour l'analyse PMM de ces ouvrages, on a besoin d'un algorithme non linéaire qui est assez polyvalent pour rester stable si des discontinuités surviennent pendant l'analyse hydromécanique (ces discontinuités sont causées par l'actualisation des sous-pressions dans les fissures);
- les structures hydrauliques étant généralement trapues (rapport usuel $L/h \leq 1.5$) les déformations en cisaillement (tant dues à l'effort tranchant qu'à la torsion) ne peuvent être négligées;
- la fissuration provoque des concentrations des contraintes lors d'une analyse par éléments finis qui doivent être gérées (une méthode fréquemment utilisée est la linéarisation des contraintes).

Le développement des nouveaux modèles d'analyse de stabilité des structures hydrauliques est d'un intérêt industriel certain surtout à cause des coûts importants requis pour la réparation des ouvrages existants. Il s'agit d'une préoccupation constante maintenue tout au long de ce projet à travers lors un contact actif avec l'industrie (Hydro-Québec, Centre d'expertise hydrique du Québec), visant à s'assurer que les résultats du projet répondent adéquatement aux besoins réels des ingénieurs praticiens.

Objectifs

Le but principal de ce projet de recherche est d'élaborer un modèle non linéaire d'analyse hydromécanique 3D PMMVVT, d'un ouvrage hydraulique non armé, ou faiblement armé, (barrage-poids, piliers d'évacuateur de crues, prise d'eau) pour l'analyse PMM, basé principalement sur la théorie des poutres et sur la mécanique des milieux fissurés permettant d'évaluer adéquatement la résistance de l'ouvrage analysé. Ce modèle tient compte de particularités des structures hydrauliques : (a) sections variables, trapues, fissurées; (b) matériau sans résistance à la traction; (c) modèle Mohr-Coulomb pour la friction; (d) présence de sous-pressions. Il détermine principalement : (a) l'aire fissurée et la position des fissures dans le plan de la section analysée sous sollicitations de flexion biaxiale avec la présence des sous-pressions (PMM); (b) la distribution des contraintes normales et de cisaillement due à la flexion, à la torsion et à l'effort tranchant biaxial sur la partie qui reste non fissurée (VVT); (c) les facteurs de sécurité au glissement qui tiennent compte de la torsion et de cisaillement biaxiale (FSG). Ce modèle est introduit dans un logiciel convivial.

Les objectifs spécifiques énumérés ci-dessous ont été visés par le projet :

- effectuer une revue critique de la littérature sur les modèles et méthodes d'analyse, les plus performants, de stabilité des ouvrages hydrauliques;
- perfectionner l'algorithme d'actualisation des sous-pressions (développé pendant la maîtrise) afin de contrôler la discontinuité d'actualisation;
- concevoir un algorithme pour déterminer des surfaces de rupture $P-M_x-M_y$ pour sections des

structures hydrauliques avec résistance limitée à la traction en présence des sous-pressions;

- construire un modèle de calcul pour déterminer au long de l'élément la distribution de cisaillement due à la torsion T (uniforme et non uniforme) et à l'effort tranchant biaxial V_x , V_y pour des sections fissurées ainsi que l'interaction entre les sollicitations 3D (P - M_x - M_y - V_x - V_y - T) en présence des sous-pressions;
- introduire le modèle dans un logiciel d'analyse non linéaire de fissuration (développé entièrement par l'auteur) qui actualise les sous-pressions et qui calcule des facteurs de sécurité au glissement 3D;
- commenter de manière critique les résultats obtenus et exprimer des recommandations quant au choix et à la mise en œuvre de méthodes de calcul hydromécanique 3D basées sur la théorie des poutres pour l'analyse des structures hydrauliques.

Contributions originales

On a divisé cette section en trois parties, correspondant aux trois articles, et pour chacune on présente les contributions originales spécifiques. À la meilleure connaissance de l'auteur, les contributions suivantes sont considérées comme originales par rapport à la littérature :

a) "Enveloppes de ruptures PMM pour structures hydrauliques (σ linéaire)" - chapitre 3:

- analyse critique de la littérature pour les méthodes de construction des enveloppes de ruptures PMM en montrant les points forts et faibles de chaque méthode (analyse détaillée de la forme, et des propriétés);
- introduction du concept "multicritère " pour la génération des surfaces de rupture PMM (on peut introduire plusieurs critères qui sont simultanément respectés par les points intérieurs de la surface);
- modalité pour tenir compte de l'influence des sous-pressions pour une structure hydraulique et aussi les caractéristiques de l'enveloppe PMM quand les sous-pressions sont modifiables ou constantes par rapport à la fissuration.

b) "Analyse sectionnelle élastique de contraintes des sections des piliers à section variable" - chapitre 4 :

- analyse critique de la littérature pour les méthodes d'analyse sectionnelle élastique en formulation variationnelle et FE basée sur fonctions de gauchissement ou de contraintes;
- formulation générale FE pour l'analyse élastique sectionnelle des sections arbitraires (avec symétrie uniaxiale) de piliers à section variable (variabilité dans un seul plan) soumises aux sollicitations 3D PMMVVT.

- validation de la méthode pour des sections ayant en rapport hauteur de l'élément/hauteur de la section très petit comme les piliers d'évacuateurs de crues (contraintes normales non linéaires et déformations importantes en cisaillement).

c) "Analyse sectionnelle tridimensionnelle hydromécanique des structures hydrauliques fissurées" - chapitre 5 :

- proposition et validation d'un modèle d'analyse élastique sectionnelle des sections arbitraires ayant variation longitudinale arbitraire soumises aux combinaisons arbitraires de charges 3D PMMVVT incluant les effets de la torsion uniforme et non uniforme;
- utilisation du modèle à l'analyse élastique des piliers fissurés d'évacuateur de crues soumis aux sollicitations 3D incluant les sous-pressions;
- développement des facteurs de sécurité au glissement approprié qui tiennent compte de la distribution réelle des contraintes de cisaillement dues à la flexion biaxiale et à la torsion.

CHAPITRE 1

REVUE CRITIQUE DE LA LITTÉRATURE

1.1 Introduction

Cette revue de littérature complète celle des articles en fournissant plus de détails et un contexte plus général. On présente dans ce chapitre une revue de la littérature concernant les aspects les plus importants lors de l'analyse des structures hydrauliques soumises aux combinaisons des charges tridimensionnelles, $P-M_x-M_y-V_x-V_y-T$ (PMMVVT). On considère les aspects particuliers de ces ouvrages : couplage hydromécanique des charges 3D, sections variables, comportent de "mur trapu" (déformation de cisaillement, torsion uniforme et non-uniforme), fissuration, sous-pressions, résistance à la traction du béton nulle ou limitée, résistance au cisaillement principalement par friction et cohésion. À lire aussi la revue de la littérature des chapitres 3, 4 et 5.

1.2 Construction des diagrammes d'interaction PMM

L'analyse d'une section ayant une résistance limitée à la traction soumise à une force axiale excentrée par rapport à son centroïde est généralement non linéaire, parce que la section peut fissurer. Afin d'assurer une exploitation sécuritaire de l'ouvrage, la section doit toujours respecter des critères limites selon les combinaisons des charges dites normales, inhabituelles (drains bloqués) et extrêmes (crues, séismes). Les critères peuvent être liés au matériau (contrainte ou déformation maximale, courbure maximale, etc.) ou non (l'aire fissurée maximale pour contrôler les contraintes de cisaillement et le glissement de la structure, l'aire comprimée maximale pour un comportement ductile, etc.).

Pour vérifier si ces critères sont respectés il faut analyser la section pour chaque combinaison de charges : P, M_x, M_y (PMM) à laquelle elle est soumise. Ce calcul devient rapidement lourd pour un grand nombre de combinaisons ou pour des combinaisons biaxiales (M_x et M_y).

Une solution efficace à ce problème est de construire un volume tridimensionnel dans le plan $P-M_x-M_y$ qui, pour un critère limite donné, a les propriétés suivantes, Fig. 1.1(a) : (a) tout point (PMM) à l'intérieur du volume ou sur le volume respecte le critère limite et la combinaison de charges est sécuritaire par rapport à ce critère; (b) tout point à l'extérieur de ce volume conduit à des états non sécuritaire de la section.

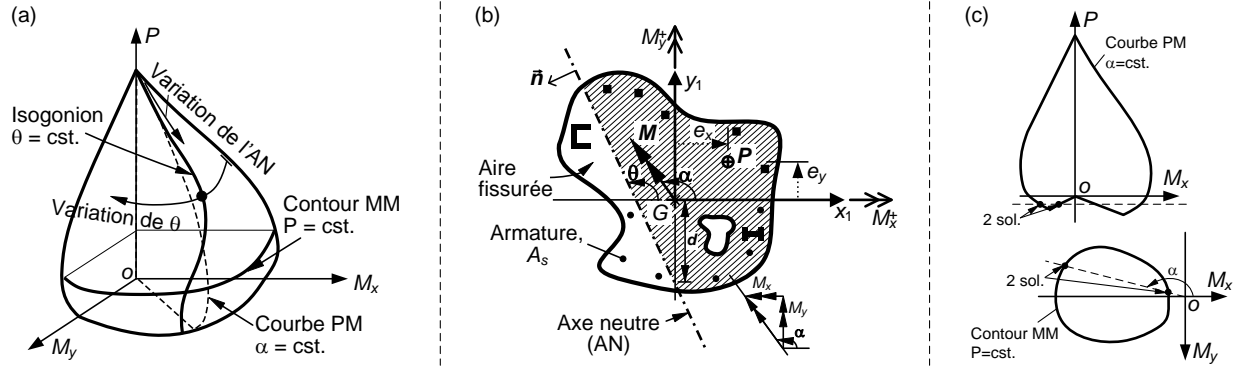


Fig. 1.1 Construction des diagrammes PMM : (a) techniques de construction; (b) notations; et (c) situations qui peuvent générer des difficultés de convergence (critère : aire fissurée max)

L'avantage pratique de ce volume (souvent appelé *diagramme* ou *enveloppe* d'interaction) est tellement important que le sujet a reçu une très grande attention dans la littérature. Les études sont concentrées sur : (a) les techniques de construction des enveloppes et stratégies non linéaires de solution; (b) les méthodes d'intégration des contraintes sur des sections arbitraires; (c) les analyses comparatives de performance des techniques de calcul. Toutefois, on retrouve un *seul critère* pour lequel le diagramme PMM est construit : celui de la déformation maximale ε_u (ce critère peut aussi avoir d'autre forme, comme : la courbure maximale, la contrainte maximale). Les premières publications sur l'utilisation du diagramme d'interaction PMM et sur le calcul des structures en béton armé soumises à la flexion biaxiale sont apparues dans les années 1960 (Furlong et al. 2004; Mattock et al. 1961; Bresler 1960). À l'époque, l'enveloppe PMM était construite en se basant, en principale, sur des approches limitatives : (a) le concept du "bloc rectangulaire" pour la distribution des contraintes ultimes en béton; (b) la formulation "analytique" du diagramme PMM (e.g., $(M_x/M_{xl})^\alpha + (M_y/M_{yl})^\beta = 1$, ou α et β sont des coefficients et l'indice l signifie *limite*). Les auteurs ont éliminé ces limitations et ils ont proposé diverses méthodes efficaces et/ou stables pour la construction précise des diagrammes PMM mais toujours pour le même critère limite : ε_u . L'analyse des sections pour les états de services a été aussi traitée par divers auteurs (Wang et al. 2007; Brondum-Nielsen 1997) mais l'emploi des diagrammes PMM pour ces états est plutôt isolé, malgré son utilité (Izzudin et Smith 2000). On a développé aussi des méthodes approximatives ou simplifiées pour l'analyse des sections soumises à des charges PMM (Cedolin et al. 2008; Foster et al. 2003; Wang et Salmon 1965). Bien que les enveloppes PMM soient souvent retrouvées comme des outils puissants de calcul pour les bâtiments et ponts leur application pour les ouvrages hydrauliques armé ou non armé est très rare (USACE 2003).

Le tableau 1.1 montre les caractéristiques principales des plus importantes méthodes de construction du diagramme PMM pour des sections en béton armé et/ou précontraint. Pratiquement, toutes les techniques

présentées considèrent : (a) des sections arbitraires de béton armé (exception Izzudin et Smith 2000; Zupan et Saje 2005); (b) des armatures ponctiformes; (c) la flexion biaxiale; (d) une distribution linéaire de ε (exception Sfakianakis 2002); (e) un seul critère limite : ε_u . Dans ce tableau on utilise les conventions et notations suivantes, [voir aussi la "Liste des symboles" ci-dessus et Fig. 1.1(b)] :

- "PMM pour AN" = calcul des résultantes PMM pour une position de l'axe neutre (AN) donné (problème d'intégration de la distribution des contraintes, σ , sur une section arbitraire);
- "AN pour PMM", " A_s pour PMM" ou " AN/A_s pour PMM" = calcul de la position de l'AN, de l'armature nécessaire ou des deux pour des résultantes PMM données (problème itératif pour localiser l'AN qui respecte l'équilibre de la section);
- "load factor" définit un coefficient qui est appliqué à la charge, qui sollicite la section, et qui exprime la fraction maximale de la charge qui peut être appliquée sur la structure afin de respecter le critère limite (e.g., on est intéressé à savoir quelle fraction d'un moment M_x peut agir de manière sécuritaire sur une section, pour un P donné);
- "eqs. en σ " ou "eqs. en ε " = modalité d'écrire les équations d'équilibre; par définition, le problème est écrit "en σ " si les inconnues sont reliées directement à la position de l'AN (d , θ) et il est écrit "en ε " si les inconnues ne sont pas directement reliées à la position de l'AN (ψ_x , ψ_y) mais par des quantités dérivées; les deux méthodes sont absolument équivalentes, la seule différence étant que pour " σ " on ne calcule pas explicitement la courbure pendant les itérations tandis que pour " ε " on calcule systématiquement la courbure en pouvant facilement générer la courbe $M-\psi$; une conversion entre les deux méthodes est toujours possible la deuxième (ε) étant plus appropriée (calcul de ψ) aux algorithmes internes de la MEF;
- "[reprogrammabilité]" (deuxième colonne) est une évaluation qui représente une appréciation sur la possibilité de reprogrammer l'algorithme à partir des articles disponibles dans le domaine public (le 5 signifie "facilement reprogrammable"); les critères étaient (en cette ordre) : (1) la description détaillée, la clarté et la complétude de l'algorithme; (2) la complexité de la formulation et de l'implémentation; (3) la validation employée par son auteur; (4) la stabilité numérique de la méthode; (5) la présence possible des discontinuités pendant les itérations (e.g., calcul des dérivées quand on pourrait rencontrer une "division par zéro"); (6) l'auto-adaptabilité des algorithmes face à la non-convergence et la qualité des algorithmes auto adaptable.

En analysant les méthodes détaillés en tableau 1.1 on observe que :

- La stratégie de construction des diagrammes influence décisivement les caractéristiques de la méthode (stabilité numérique, habileté de générer PM, MM, vitesse de calcul, etc.); la méthode d'intégration utilisée est seulement une fonction d'optimisation appliquée à la stratégie de base.

Tableau 1.1 Caractéristiques principales des méthodes de construction des diagrammes PMM

No.	Article / [Reprogrammable]	Stratégie	Intégration	Courbe σ - ϵ béton	Courbe σ - ϵ acier	Point de référence	Convergence	Utilisation	Obs.
1	Alfano et al. (2007) / [2]	<ul style="list-style-type: none"> Newton (tangent) autres schémas eqs. en ϵ 	<ul style="list-style-type: none"> sur contours (Green) analytique 	<ul style="list-style-type: none"> parab. $f'_i = 0$ 	elasto-pl.	arbitraire	<ul style="list-style-type: none"> instable pour déformation ~ constante algorithme auto-adapt. 	<ul style="list-style-type: none"> courbe PM charge ultime pour charge morte 	<ul style="list-style-type: none"> utilise le "load factor" démontre existence et unicité de la sol. (b.a.)
2	Bonet et al. (2006) / [3]	<ul style="list-style-type: none"> comparaison des méthodes 	<ul style="list-style-type: none"> fct. Heaviside numérique 	<ul style="list-style-type: none"> parab. $f'_i = 0$ 	elasto-pl.	centroïde élastique	-	<ul style="list-style-type: none"> PMM pour AN 	<ul style="list-style-type: none"> diverses mét. d'intégr. analyse paramétrique
3	Bonet et al. (2004) / [2]	<ul style="list-style-type: none"> Newton (tangent) eqs. en ϵ 	<ul style="list-style-type: none"> sur contours (Green) numérique 	<ul style="list-style-type: none"> multi-parab. $f'_i \neq 0$ 	elasto-pl.	-	<ul style="list-style-type: none"> limitations si on considère la dégradation du béton 	<ul style="list-style-type: none"> PMM pour AN 	<ul style="list-style-type: none"> propose/discute deux méth. d'intégration : TLI, MTLI
4	Brondum-Nielsen (1997); (1987); (1986a); (1986b); (1986c); (1984); (1979) / [5]	<ul style="list-style-type: none"> Newton (tangent) eqs. en σ 	<ul style="list-style-type: none"> sur contours (Green) analytique 	<ul style="list-style-type: none"> linéaire 	linéaire	centroïde élastique	-	<ul style="list-style-type: none"> AN pour PMM 	<ul style="list-style-type: none"> considère : retrait et fluage, précontrainte (pertes), présence de charges permanentes et transitoires
5	Charalampakis et Koumoussis (2008); et (2005) / [4]	<ul style="list-style-type: none"> isogonic eqs. en σ 	<ul style="list-style-type: none"> décomposition en trapèzes courbes analytique 	<ul style="list-style-type: none"> multi-polynom. $f'_i \neq 0$ 	multi-lin.	arbitraire	<ul style="list-style-type: none"> aucune description non lin. algorithme de la forme $f(x) = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> contour MM courbe PM courbe M-ψ AN pour PMM 	<ul style="list-style-type: none"> propose l'utilisation de l'approche isogonic pour trouver l'AN
6	Chen et al. (2001) / [4]	<ul style="list-style-type: none"> quasi-Newton (regula Falsi) eqs. en σ 	<ul style="list-style-type: none"> décomposition en polygones (fibres) analytique 	<ul style="list-style-type: none"> parab. $f'_i = 0$ 	elasto-pl.	centroïde plastique	<ul style="list-style-type: none"> instable pour armatures très excentrées 	<ul style="list-style-type: none"> contour MM courbe PM AN/A_s pour PMM 	<ul style="list-style-type: none"> discussion sur la relation entre θ et α
7	Chiorean (2006) / [3]	<ul style="list-style-type: none"> Newton (tangent) eqs. en ϵ 	<ul style="list-style-type: none"> sur contours (Green) numérique 	<ul style="list-style-type: none"> non lin. $f'_i = 0$ 	non-lin.	-	-	<ul style="list-style-type: none"> courbe PM contour MM AN pour PMM 	<ul style="list-style-type: none"> méthode rapide et stable utilise le "load factor"
8	Chiorean (2010) / [3]	<ul style="list-style-type: none"> Newton (incr.-it., "arc length") eqs. en ϵ 	<ul style="list-style-type: none"> numérique (Gauss-Lobatto) 	<ul style="list-style-type: none"> non lin. $f'_i = 0$ 	elasto-pl.	arbitraire	<ul style="list-style-type: none"> stable algorithme auto-adapt. 	<ul style="list-style-type: none"> courbe PM, MM AN pour PMM 	<ul style="list-style-type: none"> méthode rapide, stable algo. complexes
9	De Vivo et Rosati (1998) / [2]	<ul style="list-style-type: none"> Sécante eqs. en ϵ 	<ul style="list-style-type: none"> calcul des propr. géom. (contours) analytique 	<ul style="list-style-type: none"> parab. $f'_i = 0$ 	elasto-pl.	arbitraire	<ul style="list-style-type: none"> instable pour déformation ~ constante ou sect. non symétriques 	<ul style="list-style-type: none"> P, M_y, pour M_x PMM pour AN 	<ul style="list-style-type: none"> discussion WSD - UD algorithme auto-adap. pour converger
10	Fafitis (2001) / [5]	<ul style="list-style-type: none"> isogonic eqs. en σ 	<ul style="list-style-type: none"> sur contours (Green) analytique 	<ul style="list-style-type: none"> polynôme 3^{ème} deg. $f'_i = 0$ 	elasto-pl.	centroïde élastique/plastique	<ul style="list-style-type: none"> aucune méthode non linéaire n'est utilisée 	<ul style="list-style-type: none"> contour MM courbe PM AN pour PMM 	<ul style="list-style-type: none"> discussion sur l'influence du point de référence
11	Izzudin et al. (2002) / [3]	<ul style="list-style-type: none"> Newton (tangent) eqs. en ϵ 	<ul style="list-style-type: none"> décomposition en triangles analytique 	<ul style="list-style-type: none"> parab. $f'_i = 0$ 	bi-lin.	calculé autom.	-	<ul style="list-style-type: none"> adapté pour FEA algorithmes 	<ul style="list-style-type: none"> introduit la décomposition du domaine en triangle
12	Izzudin et Smith (2000) / [3]	<ul style="list-style-type: none"> itérations basées sur fct. d'erreur eqs. en ϵ 	<ul style="list-style-type: none"> décomposition en triangles analytique 	<ul style="list-style-type: none"> parab. $f'_i = 0$ 	bi-lin.	calculé autom.	-	<ul style="list-style-type: none"> contour MM FEA algorithmes 	<ul style="list-style-type: none"> solution pour éliminer les difficultés de conv. dues au point de réf.
13	Kawakami et al. (1985) / [2]	<ul style="list-style-type: none"> basée "point fixe" eqs. en σ 	<ul style="list-style-type: none"> sur contours lin. points Gauss 	<ul style="list-style-type: none"> parab. $f'_i \neq 0$ 	multi-lin.	arbitraire	-	<ul style="list-style-type: none"> P_{max} pour e_x et e_y AN pour PMM 	<ul style="list-style-type: none"> analyse de fiss., ultime inclut précontrainte

Tableau 1.1 Caractéristiques principales des méthodes de construction des diagrammes PMM (suite)

No.	Article	Stratégie	Intégration	Courbe σ - ε béton	Courbe σ - ε acier	Point de référence	Convergence	Utilisation	Obs.
14	Kwan et Liauw (1985) / [4]	<ul style="list-style-type: none"> itérations basées sur fct. d'erreur eqs. en ε 	<ul style="list-style-type: none"> sur contours (Green) analytique 	<ul style="list-style-type: none"> parab. $f'_t = 0$ 	tri-lin.	centroïde plastique	-	<ul style="list-style-type: none"> charge ultime pour charge morte AN pour PMM 	<ul style="list-style-type: none"> introduit le concept de "load factor" diag. non convexe
15	Marin (1979) / [5]	<ul style="list-style-type: none"> isogonic eqs. en σ 	<ul style="list-style-type: none"> aucune description (bloc rectangulaire) 	<ul style="list-style-type: none"> bloc rectang. 	elasto-pl.	arbitraire	-	<ul style="list-style-type: none"> contour MM courbe PM AN/A_s pour PMM PMM pour AN 	<ul style="list-style-type: none"> introduit l'approche isogonic s'occupe des sections non symétriques ("L")
16	Pisani (2004); (1996) / [3]	<ul style="list-style-type: none"> aucune stratégie non linéaire eqs. en ε 	<ul style="list-style-type: none"> sur contours (Green) numérique 	<ul style="list-style-type: none"> arbitraire 	arbitraire	centroïde plastique	-	<ul style="list-style-type: none"> alg. d'intégration PMM pour AN 	<ul style="list-style-type: none"> discute de l'existence et unicité de la sol. phases de construction cond. nécessaires des alg. non linéaires temp. vs ε non lin.
17	Rodriguez et Aristizabal-Ochoa (1999) / [4]	<ul style="list-style-type: none"> quasi-Newton (tangent) eqs. en σ 	<ul style="list-style-type: none"> décomposition en trapèzes analytique 	<ul style="list-style-type: none"> parab. $f'_t = 0$ 	multi-lin.	arbitraire	<ul style="list-style-type: none"> stable seulement pour P et α bien choisis instable pour déformation \sim constante 	<ul style="list-style-type: none"> P_{max} pour e_x et e_y courbe PM A_s pour PMM 	<ul style="list-style-type: none"> flexible et accessible problèmes de convergence
18	Rotter (1985) / [2]	<ul style="list-style-type: none"> Newton (tangent) eqs. en ε 	<ul style="list-style-type: none"> sur contours (Green) analytique 	<ul style="list-style-type: none"> arbitraire 	arbitraire	arbitraire	<ul style="list-style-type: none"> instable pour déformation \sim constante 	<ul style="list-style-type: none"> courbe M-ψ PMM pour AN algorithmes MEF 	<ul style="list-style-type: none"> considère pour acier les contr. résiduelles σ-ε discontinue
19	Sfakianakis (2002) / [4]	<ul style="list-style-type: none"> isogonic eqs. en σ 	<ul style="list-style-type: none"> utilise les "pixels" de l'image numérique 	<ul style="list-style-type: none"> parab. $f'_t = 0$ 	elasto-pl.	centroïde élastique	<ul style="list-style-type: none"> aucun problème (à son avis, il n'utilise pas des algorithmes non lin.) 	<ul style="list-style-type: none"> courbe PM M_x, M_y pour P courbe M-ψ 	<ul style="list-style-type: none"> considère ε non lin. considère le glissement de l'armat.
20	Sousa et Muniz (2007) / [4]	<ul style="list-style-type: none"> Newton (tangent) eqs. en ε 	<ul style="list-style-type: none"> calcul des propr. géom. (contours) analytique 	<ul style="list-style-type: none"> multi-polyn. $f'_t \neq 0$ 	elasto-pl.	centroïde plastique	-	<ul style="list-style-type: none"> PMM pour AN algorithmes MEF 	<ul style="list-style-type: none"> intégration basée sur le calcul des propriétés géom. de la section
21	Thanoon et al. (2004) / [5]	<ul style="list-style-type: none"> Newton (tangent) eqs. en σ 	<ul style="list-style-type: none"> décomposition en fibres 1D analytique 	<ul style="list-style-type: none"> non lin. $f'_t = 0$ 	bi-lin.	centroïde élastique/plastique	-	<ul style="list-style-type: none"> PM pour AN AN pour PM 	<ul style="list-style-type: none"> méthode très simple orientée vers la flexion uniaxiale
22	Yau et al. (1993) / [1]	<ul style="list-style-type: none"> quasi-Newton (regula Falsi) 	<ul style="list-style-type: none"> aucune description (bloc rectangulaire) 	<ul style="list-style-type: none"> bloc rectang. 	elasto-pl.	auto adaptable	<ul style="list-style-type: none"> très stable d'après leurs études (auto-adaptatif) 	<ul style="list-style-type: none"> contour MM 	<ul style="list-style-type: none"> discussion sur : influence de d et θ, armatures excentrées
23	Yen (1991) / [3]	<ul style="list-style-type: none"> quasi-Newton (tangent) eqs. en σ 	<ul style="list-style-type: none"> aucune description (bloc rectangulaire) 	<ul style="list-style-type: none"> bloc rectang. 	elasto-pl.	-	-	<ul style="list-style-type: none"> AN pour PMM A_s pour PMM 	<ul style="list-style-type: none"> introduit et détaille la méthode quasi-Newton
24	Zupan et Saje (2005) / [3]	<ul style="list-style-type: none"> Newton (tangent) eqs. en ε 	<ul style="list-style-type: none"> 3 méthodes de décomposition analytique vs. numérique 	<ul style="list-style-type: none"> non lin. $f'_t \neq 0$ 	-	centroïde élastique	-	<ul style="list-style-type: none"> PMM pour AN matrice tangente pour ε donnée 	<ul style="list-style-type: none"> considère des sections non armés discute l'influence de "floating-point" ops.

- La construction des diagrammes par courbes PM (en variant la charge axiale) est plus stable que celles par contours MM (en variant l'angle α) parce que la courbe PM garantit une seule solution pour une P donnée tandis que le contour MM n'assure pas une solution unique associée à un α donné, Fig. 1(c). Dans le plan MM on pourrait trouver deux intersections entre la droite à l'angle α et le contour MM si le point de référence n'est pas bien choisi. Ainsi, un point de référence mal choisi peut engager des problèmes de convergence de l'algorithme. Une discussion plus détaillée et des solutions ont été apportées par Yau et al. (1993) et Izzudin et Smith (2000).
- La génération des *courbes PM* (gPM) et des contours MM (cMM) a plusieurs avantages : (a) interprétation facile dans la pratique; (b) production naturelle de la courbe M- ψ ; (c) utilisation du même algorithme pour obtenir le diagramme PMM et la position de l'AN pour un point de calcul; (d) grande vitesse; (e) stabilité pour gPM (pour une valeur de P une seule valeur de M est possible); et (f) adaptabilité aux multicritères pour cMM. Toutefois, la gPM et cMM ont des désavantages importants : (a) leurs convergences dépendent du choix des valeurs initiales; (b) elles deviennent instables pour un état de déformation constant (e.g., compression pure); (c) elles ont des difficultés de convergence en présence de discontinuités; (d) la gPM s'adapte difficilement aux multi-critères [si pour un P donné plusieurs M sont possibles, comme pour le critère d'aire fissurée maximale, Fig. 1.1(c)]; et (e) la cMM dépend du choix du point de références [pour un α donné plusieurs solutions sont parfois possibles, Fig. 1.1(c)].
- La méthode isogonique, élimine pratiquement tous les désavantages des méthodes non linéaires ci-dessus (très stable parce qu'elle n'utilise aucune stratégie non linéaire itérative et adaptable facilement à une grande variété des critères). Cependant, elle a quelques désavantages : (a) elle ne construit pas directement des courbes PM et MM (ces courbes sont construites facilement et avec précision mais avec un effort de calcul supplémentaire); (b) elle ne trouve pas directement la réponse d'une section à une seule paire PMM [la réponse pourrait être obtenue avec un algorithme géométrique de recherche dans l'espace PMM, Charalampakis et Koumousis 2008]; et (c) elle est plus lente que les méthodes non linéaires.

Par la suite, le choix entre la méthode non linéaire et isogonique devrait être basée sur deux questions : (1) Est-ce que la performance recherchée de la méthode est sa vitesse ou sa stabilité? (2) Est-ce qu'il y a des facteurs qui peuvent favoriser l'apparition des problèmes de convergence des méthodes non linéaires (sections non symétriques ou non armées, discontinuités, solutions non uniques, multi-critères, etc.) ? Si la réponse à la première question est "la vitesse" et à la deuxième est "non" alors il est mieux de choisir un algorithme non linéaire classique (e.g., Chen et al. 2001; Chiorean 2006). Par contre, si les réponses sont "la vitesse" et "oui", il est mieux de choisir un algorithme non linéaire auto adaptable (e.g., Chiorean 2010,

Alfano et al. 2007; Yau et al. 1993). Dans tous les autres cas l'approche isogonique est plus appropriée : c'est notamment le cas des structures hydrauliques.

Les structures hydrauliques peuvent être non armées et/ou non symétriques (construites ou rendues à cause des endommagements). Elles sont analysées dans le contexte de plusieurs critères (aire fissurée maximale, position limite de la résultante et contraintes maximales). La stabilité numérique des algorithmes pour l'analyse de ces structures est fondamentale compte tenu qu'elles sont soumises à des charges discontinues (les sous-pressions) et que la solution n'est pas toujours unique. Ainsi, l'approche isogonique est préférable; les approches non linéaires sont plus rapides mais elles introduisent intrinsèquement des difficultés de convergence.

1.3 Analyse sectionnelle des contraintes

La réponse d'une structure soumise aux sollicitations tridimensionnelles doit respecter trois conditions fondamentales de la TE : (i) les équations d'équilibre; (ii) les relations de compatibilité; et (iii) les lois des matériaux (Timoshenko et Goodier 1970). Si une de ces conditions n'est pas respectée la solution n'est pas *exacte* dans la limite des hypothèses de la TE. Pourtant, on a montré que pour plusieurs cas même si on ne respecte pas rigoureusement la compatibilité la solution demeure acceptable ("*Equilibrium is essential - compatibility optional*", Wilson 2002). Il y a plusieurs exemples qui s'incluent dans cette catégorie : (a) l'analyse des structures en considérant l'axe des éléments (on néglige la compatibilité spatiales entre les barres qui se réunissent dans un nœud en gardant la compatibilité au niveau de l'axe), (b) les éléments finis incompatibles, (c) l'analyse sectionnelle de fissuration, etc. La solution du problème 3D de la TE implique la solution d'un système de quinze équations différentielles (trois équations d'équilibre, six équations de déformations, six équations d'élasticité) avec quinze inconnus (trois déplacements : u , v , w , six déformations : ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{xz} , γ_{yz} , six contraintes : σ_x , σ_y , σ_z , τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yz}), Bia et al. 1983. À ces équations s'ajoutent les conditions aux frontières (trois équations à la surface extérieure de l'élément, six conditions d'équilibre externe entre les forces appliquées et les résultantes de contraintes et des conditions aux appuis); pour plus de détails sur les équations voir chapitre 4. On montre que les six déformations (notées génériquement ε et γ) et par la suite les six contraintes (notés génériquement σ et τ) sont uniquement déterminées à partir de trois déplacements (notées génériquement u) pour un matériau donné (Timoshenko et Goodier 1970). Toutefois, le contraire n'est pas nécessairement vrai : en commençant avec un champ de déformations ε , γ on ne retrouve pas un champ de déplacements unique à cause de deux raisons principales : (i) la relation de couplage entre les déformations (six ε , γ à partir de trois u) ce qui se traduit mathématiquement par des conditions de continuité et compatibilité et (ii) déplacements de corps rigides qui sont des fonctions "cachées" dans les dérivés de déplacement comme constantes d'intégration

(Bouaanani 2005). Les équations de compatibilité peuvent être décrites en termes de déformations, appelés "de Saint-Venant", ou en termes de contraintes, appelés "de Beltrami-Michell" (Sokolnikoff 1956). Si la solution est basée sur un champ proposé de déplacements (fonction de gauchissement), les équations de comptabilités sont identiquement respectées; si la solution est basée sur un champ proposé de contraintes (fonction de contraintes) avec l'ajout des équations de compatibilité, la solution devient unique (Love 1944).

On retrouve dans la littérature plusieurs techniques pour résoudre le problème générale de la TE. Il existe des solutions analytiques, mais soit pour des cas simples soit avec des simplifications supplémentaires. Ainsi, la plupart des méthodes pour résoudre sont numériques. Au niveau mathématique, il y a deux directions principales : (i) la formulation différentielle et (ii) la formulation intégrale; les deux conduisent à la formulation intégrale pondérée qui est la base de la MEF. Au niveau de la spatialité du problème, on retrouve l'analyse 3D, 2D, 1D.

1.3.1 Formulations mathématiques

Les équations fondamentale de la TE ont une formulation différentielle. On exige à un champ de fonctions de respecter (a) un système d'équations différentielles (ED) et (b) un ensemble de conditions aux frontières. Une solution obtenue à partir de cette formulation a l'avantage de l'uniformité et de la satisfaction continue des conditions exigées à tous les points du domaine. Toutefois, cette solution est difficile ou souvent impossible parce qu'elle nécessite une solution analytique; une solution numérique serait possible mais elle n'est pas *différentielle* sensu stricto. La formulation différentielle (FD) s'appelle souvent la *formulation forte* (Ibrahimbegovic 2009); le terme *forte* vient des conditions restrictives de continuité et dérivabilité appliquées aux fonctions représentant la solution (au moins, un degré de plus que pour la formulation faible).

Une façon de réduire la régularité requise aux fonctions solution est la *formulation intégrale pondérée*; à noter que cette réduction ne devrait pas affecter de façon importante la précision des résultats. Conceptuellement, elle s'exprime par le fait que la fonction respecte en *moyenne pondérée* l'équation au lieu de la respecter continuellement. Comme exemple on pourrait montrer la solution de Cowper (1965) reprise par Mason et Herrmann (1968) pour les conditions aux limites d'une poutre ayant des déformations importantes en cisaillement. Ils remplacent la condition à la limite sur le déplacement latéral de l'axe de poutre u (e.g., $u = 0$) par la même condition mais appliquée sur un déplacement intégral pondéré par l'aire de la section :

$u = \frac{1}{A} \int_A u dA$. La fonction de pondération est théoriquement arbitraire avec des restrictions

sur sa régularité. Le principe de base de la transformation différentielle-intégrale est : (a) multiplier

l'équation et les conditions aux frontières par une fonction arbitraire dite test (fonction de pondération) et intégrer sur le domaine; (b) intégrer par parties le terme qui contient l'ED (le degré de dérivation de la fonction recherchée diminue); (c) imposer les conditions aux frontières (CF) dites *naturelles* avec les conditions Neumann prescrites pour le problème (Reddy 2006). Les conditions frontières naturelles ressortent *naturellement* dans le terme de contour suite à l'intégration par parties, ce qui explique leur nom; elles sont des conditions appliquées sur la dérivée de la fonction (Neumann) et leur degré de dérivation est supérieur aux CF essentielles. À noter que les conditions Neumann (naturelles/forces) sont satisfaites au sens intégrale ou énergétique (Dufour 2008). Les CF *essentielles* (Dirichlet) représentent des valeurs données pour la fonction et ses dérivées inférieures; elles ne peuvent pas être incluses directement dans la formulation intégrale. Leur nom est probablement dû au fait qu'elles jouent un rôle essentiel pour l'unicité de la solution. L'application des CF essentielles est retardée pour la phase de résolution car au défaut de ces conditions la matrice de coefficients du système linéaire est généralement non inversable; mathématiquement la solution est non unique ou mécaniquement elle inclut des déplacements de corps rigide (théorème de Lax-Milgram, Fortin et Garon 2007). La formulation intégrale pondérée (FI) s'appelle *faible* (FF) ou souvent *variationnelle* (FV); FI forme la base mathématique de la MEF (Ibrahimbegovic 2009). Le terme *faible* vient des conditions moins restrictives de continuité et dérivabilité appliquées aux fonctions; le terme *variationnelle* est utilisé surtout parce qu'on y était arrivé à partir d'une minimisation qui faisait intervenir le calcul des variations, Fig. 1.2 (Langhaar 1962). Bien que les formulations faible et variationnelle soient mathématiquement équivalentes, on y parvient différemment; ainsi, l'appellation n'est pas nécessairement interchangeable. Toutefois, dans la littérature on appelle souvent la FI, une formulation variationnelle même si elle provient d'une équation différentielle; cette règle sera utilisée aussi dans ce chapitre (Taylor 2003). Il y a plusieurs situations où les problèmes de l'analyse de structures sont posés comme équations différentielles : déplacement latéral d'une poutre fléchie, état de tension plane (contraintes/déformations planes), calcul des fonctions de contraintes/gauchissement pour torsion ou cisaillement, ... (Sapountzakis et Panagos 2008, Reagan 2002).

La formulation faible (FF) vient directement de la formulation différentielle; si l'équation différentielle (ED) n'est pas formulée la FF ne peut pas être construite. Dans le domaine d'analyse de structures il y a souvent ce cas quand le problème est difficilement posé comme ED mais facilement comme une intégrale qu'il faut minimiser. C'est le cas de l'énergie potentielle totale. L'intégrale est mathématiquement une fonctionnelle; par fonctionnelle on comprend une fonction de fonctions. On montre que tout problème de minimisation d'une fonctionnelle (FM) qui respecte des conditions adéquates de régularité peut être traduite dans une formulation variationnelle équivalente (Johnson 1987). La fonctionnelle typique utilisée dans les domaines techniques contient l'intégrale d'une *fonction* de la *fonction cherchée* ainsi que de ses

dérivées (e.g., $G = \int_A F(x, y, u, u') dA$, x, y étant des variables indépendantes). Minimiser une fonctionnelle signifie la recherche d'une fonction qui fournit une valeur minimale à la fonctionnelle parmi toutes les fonctions qui peuvent exister dans le domaine (Dufour 2008). On montre que la minimisation, qui donne la FV, revient à annuler la première variation de la fonctionnelle G : $\delta^{(1)}G = \int_A \delta^{(1)}F dA = 0$ et

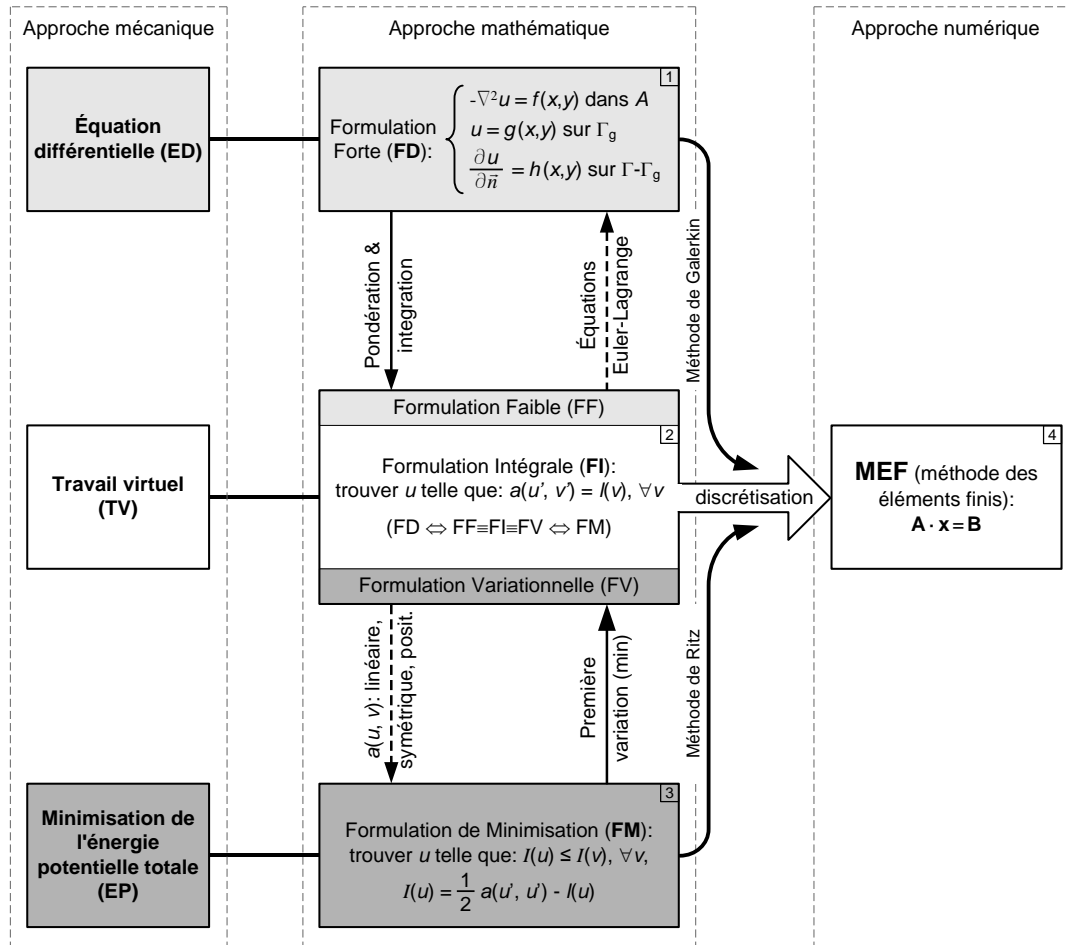
$$\delta^{(1)}F = \frac{\partial F}{\partial u} \delta u + \frac{\partial F}{\partial u'} \delta u' \quad (\text{Shames et Dym 2009}).$$


Fig. 1.2 Formulations pour résoudre le problème générale de la TE (adapté de Dufour 2008)

Les notations dans la Fig. 1.2 sont (Fortin et Garon 2007) : $a(u, v)$ est une forme intégrale bilinéaire définie comme $a(u, v) = \int_A u \cdot v dA$; $l(u)$ est une forme intégrale linéaire définie $l(u) = \int_A f \cdot u dA$; u' est ∇u .

On montre que les transformations $FD \leftrightarrow FF \equiv FV \leftrightarrow FM$ sont possibles à la limite des certaines conditions d'uniformité (Fortin et Garon 2007, Johnson 1987).

Prenons l'exemple quand le domaine est une courbe entre deux points $[(x_1, y_1), (x_2, y_2)]$ dans le plan Oxy et on recherche le chemin le plus court entre ces deux points; c'est à dire minimiser la fonctionnelle

$$G(u) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + u'^2} dx \quad (\text{FM}). \quad \text{Étant donné qu'il y a une infinité de courbes entre les deux points il faut celle } u$$

qui donne la valeur minimale à la fonctionnelle G . On montre (Shames et Dym 2009) que la minimisation revient à annuler la *première variation* $\delta^{(1)}G$ de la fonctionnelle, d'où le nom "variationnelle". Cela donne

$$\text{la forme variationnelle (FV) du problème : } \delta^{(1)}G \equiv \left. \frac{dG(u + \alpha \cdot v)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{u' \cdot \delta v'}{\sqrt{1 + u'^2}} dx = 0, \forall v, \delta v \text{ étant une}$$

petite modification arbitraire de la fonction de test v (l'incrément). Si u est une droite le terme en u' est une constante et l'intégrale donne la différence de la variation aux extrémités $\delta v(x_2) - \delta v(x_1) = 0$ (l'incrément aux extrémités et nul, $\delta v(x_2) = \delta v(x_1) = 0$); la réponse est valide pour toute fonction v arbitraire). En intégrant par parties on déduit la forme forte (FD) à l'aide de l'équation d'Euler-Lagrange adapté à ce cas :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) = \frac{u''}{(1 + u'^2)^{3/2}} = 0 \quad \text{qui a comme solution la droite } u'' = 0 \Rightarrow u = m \cdot x + n; m \text{ et } n \text{ sont des}$$

constantes (Dufour 2008).

Il y a une différence importante entre la minimisation d'une fonctionnelle et d'une fonction : le minimum d'une fonction est local venant de la dérivée nulle à un point tandis que le minimum de la fonctionnelle représente une courbe (surface en 2D, etc.). Pour la fonction l'extrême est en relation avec la *pente* de la courbe à un point donné mais pour la fonctionnelle l'extrême correspond à une *distance* (l'incrément δ) mesurée entre deux courbes admissibles passant par un point (cette distance équivaut conceptuellement à la variation de la fonction). Comme la fonction n'a aucune variation sur le contour du domaine ou on a prescrit des valeurs précises (conditions essentielles) l'incrément δ doit être nul; lorsque des valeurs précises ne sont pas exigées il faut utiliser des conditions naturelles. Par la suite, si les conditions essentielles sont imposées les conditions naturelles sont ignorées parce que la fonction est forcée à passer par des points fixes (i.e., si l'on fixe un support on ne peut pas y appliquer une charge), Fortin et Garon 2007. En continuant la comparaison, la *première variation* est nulle pour l'extrême d'une fonctionnelle aussi comme la *première dérivée* est nulle pour l'extrême d'une fonction. La première variation provient du développement en série Taylor de la fonction sous intégrale $F(x, y, u, u')$ en utilisant les incréments arbitraires des fonctions u et u' (δu et $\delta u'$) par analogie avec le développement Taylor de la fonction en voisinage du point visé (Shames et Dym 2009). Pour l'analyse de structures l'incrément δu est nommé *le déplacement virtuel*; la seule condition que ce déplacement virtuel doit respecter est d'être nul ou la fonction F a des valeurs imposées qui se traduit au niveau mécanique par la compatibilité sur les supports.

Il y a deux méthodes classiques pour l'analyse de structures basée sur une formulation intégrale : (a) la méthode du travail virtuel (TV) et (b) la méthode de l'énergie potentielle totale (EP), Fig. 1.2. Ces deux méthodes sont appelées *énergétiques* (Argyris 1960). Le mot *énergie* est important parce que l'approche énergétique permet une relaxation aux niveaux des fonctions recherchés tout en gardant un niveau raisonnable de précision de résultats. Les méthodes énergétique découlent aussi du principe d'*intégrale pondérée* parce qu'au lieu de travailler avec des variables indépendantes (déplacement, déformation, force, etc.) on les remplace par des produits de variables indépendantes en les transformant en scalaires. Prenons l'exemple du travail fait par deux forces qui produisent deux déplacements différents : les deux systèmes sont *équivalents au niveau énergétique* si les produits de chaque force par le déplacement correspondant sont égaux même si ni les forces ni les déplacements ne sont pas égaux. L'avantage des principes énergétiques pour le calcul des structures est exceptionnel; pratiquement, la plupart de logiciels d'analyse sont basés sur ces principes. Ils transforment les formulations différentielles lourdes dans des formulations intégrales flexibles. Il y en a plusieurs applications : (a) la réduction d'une charge qui agit à l'intérieur d'une poutre par des charges aux nœuds (Przemieniecki 1968); (b) l'imposition des déplacements qui est respectée seulement au niveau énergétique lorsque le calcul de ces déplacements est fait énergétiquement en utilisant des intégrales de type $\int_l \frac{Mm}{EI} dx$ (Gallagher 1975); (c) l'équivalence entre la distribution réelle de cisaillement et la distribution uniforme qui a donné le coefficient de Timoshenko (Sapountzakis et Mokos 2005); (d) l'utilisation des sections en échelle ou des distributions énergétiquement équivalentes pour sections variables (Vu-Quoc et Léger 1992).

La méthode du travail virtuel (TV) est déjà posée comme forme variationnelle (FV) tandis que la méthode de l'énergie potentielle totale (EP) nécessite une minimisation afin d'y arriver. Pour cette raison le TV (ainsi que la formulation forte) est très générale. Elle n'a théoriquement aucune limitation par rapport à l'EP qui est limitée au calcul linéaire; de plus, pour EP il faut premièrement formuler une fonctionnelle sans laquelle la forme variationnelle n'existe pas. Au moins, deux stratégies sont disponibles pour arriver au principe du travail virtuel. La première calcule directement la variation du travail au niveau interne (l'énergie de déformation) et externe (travail des forces appliquées); en mettant égaux ces deux travaux on déduit le principe du travail virtuel (Argyris 1960). À noter que : (a) l'existence d'une fonctionnelle incluant l'énergie de déformation n'est pas nécessaire pour le TV; (b) il n'y a aucun lien entre les déplacements/déformations virtuels et les forces/contraintes (Shames et Dym 2009). La deuxième stratégie suit les étapes de la transformation FD→FF (forte→faible) : on multiplie les équations de la TE avec des fonctions de test et on intègre; en appliquant l'intégrale par parties on arrive au principe du travail virtuel (TV). L'avantage de cette stratégie est qu'elle montre que le TV est une condition nécessaire

(FD→FF) et suffisante (FF→FD) pour l'équilibre interne et externe (Argyris 1960, Fig. 1.2). Il y a aussi le principe du travail virtuel complémentaire qui est conceptuellement identique au travail virtuel mais on applique des forces virtuelles sur déplacements réels; ce principe remplace les conditions de compatibilité de TE et l'équilibre est assuré par la condition que les forces sont "statiquement admissible".

La méthode de l'énergie potentielle totale assume une loi de comportement élastique du matériau. Elle est basée sur l'existence d'une fonction nommée l'énergie de déformation (Sokolnikoff 1956). On construit une fonctionnelle qui inclut l'énergie de déformation et le potentiel des forces appliquées ayant la forme conceptuelle : $\pi = \int_V \left(\int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon \right) dv - P \cdot u$. Par la suite, les contraintes σ sont transformées en déformations ε

par les lois de comportement qui à leur tour sont transcrites comme des fonctions de déplacement. Par la suite, les déplacements restent les seuls arguments de la fonctionnelle. D'autres fonctionnelles nécessitant une minimisation ont été formulées : le principe variationnel Hellinger-Reissner (arguments : déplacements et contraintes), le théorème variationnelle Hu-Washizu (arguments : déplacements, contraintes et déformations), Taylor 2003. Pour le potentiel (symboliquement noté $P \cdot u$), on garde les *forces constantes* pendant l'application de déplacements (Bouaanani 2005, Argyris 1960, Love 1944). Le sens physique de cette démarche n'est pas évident : il serait probablement plus avantageux de la voir comme une définition (Shames et Dym 2009) ou comme une propriété mathématique nécessaire pour passer d'une minimisation à sa forme variationnelle (Johnson 1987). Le premier terme (l'énergie de déformation) de $I(u)$, Fig. 1.2[3], a un coefficient 1/2 (variation linéaire) tandis que le deuxième (le potentiel) ne l'a pas. C'est la minimisation de *cette* fonctionnelle qui conduit à la forme variationnelle du travail virtuel.

En discutant de la conversion entre les diverses formulations (forte, faible/variationnelle, minimisation) on pourrait observer que lorsqu'on a déjà une formulation le chemin pour l'obtenir n'est pas nécessaire; il peut être même inconnu. L'observation est plus importante pour la formulation variationnelle (FV) parce que le degré d'uniformité de fonctions est moins grande que sa source, la forme forte (FD). Par exemple, si on nous fournit une FV on l'utilise tout de suite sans se soucier de sa provenance (qui pourrait être une forme forte ou une minimisation). La FV est utilisée directement dans la MEF qui réduit d'avantage l'uniformité requise. La conclusion mathématique de cette observation est que la solution n'est pas suffisante pour vérifier l'équation initiale; e.g., si l'équation initiale est de deuxième degré (dérivation) la solution de MEF n'est pas habituellement dérivable jusqu'à ce degré. Ainsi, d'autres outils ont été développés pour apprécier l'erreur d'une formulation (FV) par rapport à la *source* de cette formulation (FD); il s'agit d'un autre vaste domaine d'étude : l'estimation *a priori* ou *a posteriori* de l'erreur (Reddy 2006, Zienkiewicz et Taylor 2000, Ainsworth et Oden 2000).

Comme vue synoptique sur ce chapitre on synthétise les avantages (+), désavantages (-) et l'utilisation principale (u) de chaque méthode pour l'analyse de structures :

- (a) la formulation différentielle appelée forte, FD :
 - (+) générale et unitaire au niveau formulation (non linéaire, loi du matériau arbitraire, transitoire, etc.), n'impose pas l'existence d'autres fonctions (i.e., énergie de déformation);
 - (-) exige une grande uniformité des fonctions, n'est pas applicable quand l'équation différentielle n'existe pas : l'analyse de structures composées de barres car le domaine de définition n'est pas continu mais discrète (nœuds + poutres);
 - (u) formulations basées sur fonctions de "gauchissement" et de contraintes, sujet de la thèse;
- (b) l'énergie potentielle totale ou le problème de minimisation, FM :
 - (+) applicable pratiquement à tous les problèmes linéaires même si une description différentielle du problème n'existe pas;
 - (-) limitée au problème linéaire et lois de comportement élastiques, impose l'existence d'une fonction dérivable : l'énergie de déformation;
 - (u) analyse linéaire de structures composée par barres, et MEF 2D et 3D;
- (c) la méthode du travail virtuel ou la formulation variationnelle, FV :
 - (+) la plus générale aux termes de formulation, matériaux, dimensionnalité, réunit les avantages des méthodes énergétiques (équivalence énergétique);
 - (-) parfois plus difficile à formuler que l'énergie potentielle, satisfaction des fonctions et conditions limites au sens énergétique/intégrale;
 - (u) tout type de problèmes non linéaires, transitoire et interaction en éliminant les désavantages de la formulation différentielle et de la méthode d'énergie potentielle.

Si le problème est linéaire, et si l'équation différentielle et l'énergie de déformation existent ces trois méthodes sont équivalentes. Dans ce cas une transformation entre les trois est possible.

1.3.2 Dimensionnalité des formulations

La dimension spatiale de la solution la plus générale de la TE est 3D. Une des seules solutions envisageable pour le cas 3D est celle numérique surtout la famille des éléments finis (FEM, BEM, XFEM, etc.). Cette solution est difficilement obtenue tant en termes de travail direct (pré- et post- processeur) qu'en termes de ressources (coût, temps/capacité ordinateur, expertise requise). Le préprocesseur inclut la tâche difficile de maillage optimale 3D qui fait lui même l'objet d'un domaine de recherche (Geuzaine et Remacle 2009); le post-processeur peut soulever aussi des difficultés importantes lors de utilisation des résultats : coupe arbitraire dans le modèle, iso-lignes et iso-surfaces, diagrammes des contraintes/efforts, etc. (McLean et al. 2006, Zienkiewicz et Taylor 2000, Gallagher 1995). Lorsque la solution 3D implique

des algorithmes non linéaires (contacts + friction, fissuration, couplage hydromécanique, ...) plusieurs problèmes de convergence peuvent ressortir. On a prouvé, par des essais de laboratoire et avec des analyses sophistiquées que sous certaines hypothèses, un calcul 3D ou son équivalent dimensionnel inférieur (1D, 2D) donnent sensiblement les mêmes résultats. Par exemple : (a) contraintes/déformations planes; (b) calcul des plaques et coques; (c) poutre de Bernoulli et Timoshenko; (d) analyse de section à parois minces; et (e) pour l'objet de la thèse, l'analyse sectionnelle des sections arbitraires soumises au cisaillement et à la torsion (Reddy 2006). Toutefois, l'analyse de certaines structures restent seulement 3D (massifs solides, analyse locales de contraintes, ...). Le calcul avec la dimension spatiale réduite est toujours désirable tant pour l'analyse que pour validation d'analyses plus détaillées. C'est le cas d'analyse 2D et de celle très fréquente 1D d'analyse des structures composées en barres (ou simplement structures).

La revue de la littérature pour le calcul 2D avec des fonctions gauchissement est détaillée dans le chapitre 4. Dans cette section, on en traite seulement deux aspects particuliers : (i) le lien 2D-1D et (ii) l'utilisation de la méthode des éléments finis de frontière (*boundary element method*, BEM). L'analyse 2D est basée sur l'idée que les variables 3D sont réduites aux degrés de liberté (DDL) qui peuvent être inclus dans une analyse sectionnelle (déplacements et rotations). Par exemple : (a) plaques : un déplacement et deux rotations; (b) contraintes planes : deux déplacements; et (c) fonction de gauchissement : un déplacement. La réduction est possible soit parce que certaines contraintes/déplacements sont négligeables soit grâce à une technique de séparation de la vraie analyse 3D dans une analyse distincte 2D plus une analyse distincte 1D. Le dernier cas est utilisé dans ce projet. Il s'agit d'une technique très puissante utilisée largement dans le domaine d'analyse de structures (calcul ou validation). En ce qui suit, on considère le calcul d'une poutre soumise à une sollicitation 3D en admettant, pour des raisons de présentation, un seul déplacement latéral; la généralisation est directe. L'analyse d'une structure conduit à la résolution d'un système linéaire d'équations $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{P}$, Fig. 1.2[4] où \mathbf{K} , \mathbf{u} , \mathbf{P} sont les matrices connues : rigidité, déplacement et forces. En utilisant le travail virtuel, on montre que pour la méthode de déplacements, la matrice \mathbf{K} a la forme : $\mathbf{K} = \int_V \mathbf{b} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{b} dv$ où \mathbf{b} représente la matrice de fonctions de transformation de déplacements en déformation (Vu-Quoc et Léger 1992, Clough 1983). La difficulté principale est de trouver cette matrice \mathbf{b} , surtout $b_1(x, y)$. On suppose que $b(x, y, z)$ est décomposée dans deux parties, une "sectionnelle" $[b_1(x, y)]$ et une autre longitudinale $[b_2(z)]$: $b(x, y, z) = b_1(x, y) \cdot b_2(z)$; la section se trouve en Oxy et l'axe longitudinal de la poutre est le z . La fonction $b_2(z)$ fournit le déplacement latéral de l'axe de la barre; elle n'est pas généralement exacte mais surtout approximée (Cook et al. 2002). La conséquence directe de la décomposition est que le déplacement/déformation de tous les points de la section doivent être décrits par le *déplacement longitudinal* $b_2(z)$; cela revient au "calcul par axe". Si la section est admise

perpendiculaire sur l'axe longitudinal (poutre Bernoulli) cette condition est facilement respectée; lorsque, le déplacement de l'axe ne "contrôle" pas les déplacements de chaque point de la section (gauchissement) la décomposition est plus difficile sinon impossible. Pour surmonter cette difficulté on a proposé diverses techniques : (a) rotation moyenne de la section par l'utilisation des coefficients de pondération (poutre Timoshenko); (b) le gauchissement est constant tout au long de la poutre (torsion Saint-Venant); (c) le gauchissement non constant mais indépendant du déplacement latéral (torsion non-uniforme). Les fonctions de gauchissement sont utilisées dans l'évaluation de la fonction $b_I(x, y)$ qui décrit les déformations du chaque point de la section (Sapountzakis et Mokos 2004a). Une autre méthode pour un raffinement plus avancée de la fonction sectionnelle $b_I(x, y)$ est basée sur l'idée des *fibres*; elle est surtout utilisée pour l'analyse non linéaire des sections multi-matériaux comme les sections armées. Conceptuellement, il s'agit d'un modèle avancé au niveau matériau plus qu'au niveau déformations (Spacone 1996). Toutes ces techniques permettent (a) la construction de la matrice de rigidité incluant des effets plus subtils comme les déformations due au cisaillement et à la torsion (uniforme ou non uniforme); (b) une distribution des contraintes plus adéquate. Pour la méthode des forces la matrice de flexibilité, $\mathbf{u} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{P}$, a la forme $\mathbf{F} = \int_V \mathbf{a} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{a} \, dv$ ou \mathbf{a} représente la matrice de transformation de forces en contraintes (Clough 1983). Sa décomposition $a(x, y, z) = a_I(x, y) \cdot a_2(z)$, surtout $a_I(x, y)$, soulève des difficultés similaires que celles de la détermination de $b_I(x, y)$. Néanmoins, la fonction $a_2(z)$ est généralement facile à obtenir de façon "exacte" parce qu'elle vient des équations d'équilibre statique au niveau élément (Neuenhofer et Fillipou 1997).

La transformation de l'analyse 3D en une analyse 2D et une autre 1D apporte une importante simplification et une stabilité numérique accrue tout en gardant une précision adéquate. Les deux analyses distinctes impliquent deux calculs avec MEF qui à leur tour impliquent deux maillages : un pour l'analyse sectionnelle 2D et un autre pour l'analyse longitudinale 1D. Le maillage 1D est pratiquement facile même pour des barres courbes; cependant, le maillage 2D peut causer des grandes difficultés qui peuvent nuire à la performance de l'analyse une fois la transformation 3D-2D faite. Une solution pour éviter le maillage 2D est l'utilisation de la méthode des éléments finis de frontière (BEM). Dans ce cas, seulement le contour de la section est maillé. Conceptuellement, BEM utilise la formulation variationnelle comme point de départ et intègre encore une fois par parties le terme de surface. Par exemple, pour l'équation de Laplace

$$\nabla^2 u = 0 \text{ la FV est : } - \int_A \nabla u \cdot \nabla v \, dA + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, ds = 0; \text{ par la suite, l'intégration par parties donne :}$$

$$\int_A u \cdot \nabla^2 v \, dA - \int_{\Gamma} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \, ds + \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot \mathbf{v} \, ds = 0 \text{ (l'équation intégrale de frontière, FC). L'idée est de transférer le}$$

degré de dérivation de la fonction cherchée u à la fonction de pondération v afin de garder seulement des *inconnues sur la frontière* : u et sa dérivée $\partial u / \partial \mathbf{n}$. Pour y arriver l'intégrale de surface du premier terme du FC est convertie. Le Laplacien $\nabla^2 v$ suggère qu'il y aurait une équation différentielle $\nabla^2 v = -\varpi(x, y)$ qui aiderait au choix de la fonction de pondération; cette équation s'appelle la *solution fondamentale* de $\nabla^2 u = 0$. En rappelant la propriété formelle de la fonction Dirac : $\int_A u \cdot \delta(\xi - x, \eta - y) dA = u(\xi, \eta)$ il suit

que la fonction $-\varpi(x, y)$ sera la fonction Dirac en 2D $\delta(x, y)$ définie dans le point (ξ, η) ; on pourra trouver la fonction de pondération v seulement si la solution fondamentale existe. Ensuite, la FC devient :

$$u(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot v ds = 0 \quad \forall (\xi, \eta) \in A, \text{ une forme pure de contour. L'équation précédente relie la}$$

fonction inconnue u dans un point du domaine à des valeurs du contour de cette fonction et de sa dérivée. À l'aide de manipulations mathématiques on arrive à une FC formée juste de fonctions en variable de

$$\text{contour : } c(P) \cdot u(P) + \int_{\Gamma} u \cdot \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} ds = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \cdot v ds = 0 \quad \forall P \in \Gamma, \text{ } c(P) \text{ étant une fonction constante et } v \text{ étant}$$

déterminée avec la solution fondamentale (Hunter et Pullan 2008, Katsikadelis et Sapountzakis 1985). Finalement, en changeant le point P sur chaque nœud du maillage du contour on arrive à un système d'équations linéaires. Une fois les valeurs sur le contour calculées on calcule les valeurs à l'intérieure du domaine avec la FC. Les avantages (+) et désavantages (-) de cette approche sont (Hunter et Pullan 2008) :

- (+) diminution d'un degré spatial du maillage; la précision de la fonction et de sa dérivée sur la frontière est la même (les deux sont des inconnues dans la formulation); l'approximation par EF est seulement sur le contour mais pas à l'intérieure (les valeurs intérieures découlent directement des valeurs de frontière, FC);
- (-) l'utilisation de BEM pour un problème donné est conditionnée par l'existence de la solution fondamentale; les matrices du système sont non symétriques et pleines (raison pour laquelle la vitesse d'analyse diminue); difficultés d'implémentation et lors du calcul numérique des intégrales; une étape supplémentaire est nécessaire pour trouver la distribution à l'intérieure du domaine lorsque la distribution sur le contour est calculée (pourtant, une discrétisation du domaine n'est pas nécessaire parce que la dernière équation ci-dessus fournit analytiquement la distribution à tout point du domaine).

La solution fondamentale existe généralement pour tous les problèmes qui concernent le calcul des sections soumises à l'effort tranchant et à la torsion (Sapountzakis et Mokos 2007). En vue des avantages versus des désavantages de la BEM on pourrait conclure que la BEM est recommandable lorsque le maillage 2D devient difficile ou demandant en termes de ressources.

1.4 Comportement tridimensionnel des structures hydrauliques

Les structures hydrauliques sont des structures 3D sollicitées par des charges 3D (Asteris et Tzamtzis 2003). Cependant, pour une analyse globale de stabilité la méthode de gravité 1D (basée sur l'équilibre des corps rigides et la théorie des poutres en flexion) donne d'excellents résultats (Leclerc et Léger 2011, Fig. 1.3). Différents aspects d'une analyse 3D peuvent être considérés efficacement avec cette méthode simplifiée : fondations inclinées, clé de cisaillement, sous-pressions (Lombardi 2007, Mao 2003). Dans le cas où les résultats de la méthode de gravité ne sont pas satisfaisants, une analyse plus détaillée peut être effectuée. C'est notamment le cas lorsque l'on veut étudier des aspects plus particuliers du comportement de la structure avec une analyse par éléments finis qui tient compte de la compatibilité des déformations et des rigidités relatives des différentes parties de la structure (Azmi et Paultre 2002).

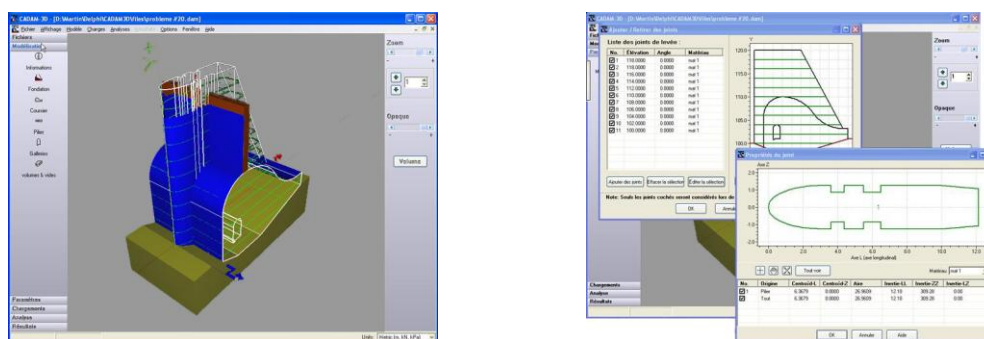


Fig. 1.3 Logiciel d'analyse basé sur la méthode de gravité, CADAM-3D (Leclerc et Léger 2011)

La rupture d'une structure hydraulique de type poids (barrage-poids, pilier d'évacuateurs de crues, prise d'eau) est principalement associée aux problèmes de fondation et à la fissuration de la structure. Les méthodes d'analyse sont développées en corrélation avec des mécanismes de rupture retenus : fissuration excessive, glissement, renversement, soulèvement de l'ouvrage, compression excessive, fatigue; pour certains de ces mécanismes on propose aussi des facteurs de sécurité (CDA 2007, USBR 1987). Ensuite, l'analyse de fissuration peut être basée sur deux méthodes : la méthode de gravité (Leclerc et Léger 2011, Stefan 2007, Leclerc et al. 2003, Tracy et Kling 1982) ou sur la méthode des éléments finis en utilisant la mécanique de rupture (Puntel et al. 2006, Reich et al. 1997, Bhattacharjee et Léger 1995).

Les charges à considérer lors de l'analyse de stabilité d'un ouvrage hydraulique sont de quatre types (toutes pouvant avoir des effets 3D): (a) hydrostatiques, (b) mécaniques, (c) thermiques et (d) chimiques. Les principales charges hydrostatiques et mécaniques sont : (a) la pression hydrostatique et hydrodynamique, les sous-pressions et la pression des sédiments, la poussée de glace et l'impact avec un bloc de glace; (b) le poids-propre de la structure et des équipements; (c) les séismes; (d) les tassements ou mouvements de la

fondation. Plusieurs combinaisons de charges doivent être considérées pour l'analyse de stabilité, tableau 1.2. Ces combinaisons sont fournies dans les guides de sécurité des barrages tant pour les conditions normales d'exploitation que pour celles exceptionnelles ou extrêmes (CDA 2007, FERC 2002, USACE 1995, USBR 1987).

Tableau 1.2 Combinaisons de charges : ouvrages hydrauliques de type poids (Miron 1997)

Description des charges	Normales											Exceptionnelles					Extrêmes						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	6	7
Poids propre	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Pression hydrostatique normale	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x						x		x	x	x	x	x
Pression hydrostatique extrême												x	x	x	x	x	x						
Poussée des sédiments	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x
Pression hydrodynamique																			x	x	x		
Sous-pressions, drains en opération	x	x	x	x	x	x	x	x	x			x	x	x	x	x	x	x					x
Sous-pressions, drains bloqués												x											
Sous-pressions avant le séisme																			x	x	x		
Poutrelles de révision	x	x										x											
Vannes ouvertes	x	x	x	x	x								x	x									
Une vanne ouverte, une vanne fermée						x	x					x			x	x	x						
Vannes fermées								x	x	x	x								x	x	x	x	x
Poussée de la glace		x							x								x				x		
Impact frontal de la glace			x			x				x			x		x								
Impact oblique de la glace				x			x				x			x		x							
Vent					x	x	x								x	x							
Séisme à base d'exploitation (OBE)																			x	x			
Séisme maximum crédible (MCE)																					x		
Diminution de température																						x	
Augmentation de température																							x

Une des conditions de charges difficile à évaluer, surtout à cause de sa dépendance de la fissuration, est celle due aux SP. La distribution des SP et leur actualisation, pour des structures fissurées, a fait l'objet de plusieurs études détaillées (Javanmardi et al. 2005, Plitzari 1998, Miron 1997, Popovici et Popescu 1992). Ces chercheurs ont qualifié principalement : l'opportunité d'utilisation des méthodes d'analyse d'écoulement en milieu poreux et fissuré avec des éléments finis, des comparaisons pour des schémas d'actualisation, l'influence des séismes sur la distribution des SP. Toutefois, les problèmes des distributions linéaires, e.g. les discontinuités, et les stratégies d'actualisation 3D ne sont pas extensivement discutés (Stefan 2007). Les guides recommandent des distributions linéaires en tenant compte de la présence de drains (CDA 2007, FERC 2002, USACE 1995); ainsi, la plupart des logiciels utilisent pour les SP une distribution linéaire comme valeur initiale et aussi pour l'actualisation (Leclerc et Léger 2011, Reich et al. 1997, Tracy et Kling 1982). Pour la fissuration 2D les prescriptions sont beaucoup moins nombreuses, les recommandations étant d'employer les EF en laissant la latitude à l'ingénieur de spécifier la stratégie d'actualisation. La distribution linéaire est gardée et pour raccorder les gradients dans

différents points de l'espace on propose deux stratégies : un/plusieurs plans et des surfaces réglées (Stefan 2007, Tracy et Kling 1982). L'avantage de la première approche est sa facilité et l'avantage de la deuxième méthode est sa flexibilité, pouvant être adaptée sans difficulté à pratiquement tous les cas (variation multilinéaire, drains, etc.).

Les différentes guides imposent différentes approches pour l'addition des SP dans les contraintes finales. Il y en a principalement deux : celle qu'on l'appelle "en contraintes totales" et celle appelée "en contraintes effectives" (Watermeyer 2006). La différence fondamentale entre les deux approches est la méthode d'introduction des SP dans les contraintes finales : comme une pression (contraintes totales, en Pa) ou par la résultante des SP (contraintes effectives, en N et N-m). La première (FERC 2002) considère qu'on ne peut pas accepter que les SP produisent une autre distribution de contraintes normales sur la structure que celle de la pression directement exercés; les contraintes finales (non linéaires) sont obtenues en sommant les contraintes de flexions dues à toutes les charges, sauf les SP, et les SP (en Pa). La deuxième (USACE 1995) ne fait pas de différence entre les charges; elle calcule la résultante des toutes les charges (incluant les SP) et, avec la résultante, elle détermine les contraintes finales de flexion (linéaires). Pour les sections non drainées, les deux approches donnent les mêmes résultats, mais pour les sections drainées les résultats avec les deux approches sont différents. Des études de cas sur des ouvrages réels démontrent que l'approche en contraintes totales est conservatrice si on compare la fissuration calculée avec celle observée (Léger P., communication personnelle, février 2008).

La distribution des contraintes de cisaillement suit la même direction de recherche que celle des contraintes normales : formules approximatives et variation amont-aval. Les formules utilisées viennent souvent des approches basées juste sur l'équilibre avec la considération de l'équilibre sur les parois obliques (Oden et Ripperger 1981). Les équations proposées par les guides pour évaluer les contraintes de cisaillement pour les sections variables ont souvent un caractère approximatif ou elles sont basées sur des distributions pré-imposées (e.g., parabolique) validées pour sections rectangulaires (USBR 1976). Les facteurs de sécurité ont été développés pour plusieurs mécanismes de défaillance : glissement, renversement, flottation, etc. (CDA 2007). On a adapté, ensuite, ces formules "primaires" pour des cas spéciaux : joints inclinés, présence de la précontrainte (comme force résistante et aussi comme charge), charges dynamiques (Leclerc et al. 2001). Cependant, des vrais facteurs de sécurité 3D qui tiennent compte des charges 3D incluant la torsion n'ont pas été proposés.

CHAPITRE 2

DÉMARCHE DE L'ENSEMBLE DU TRAVAIL DE RECHERCHE ET ORGANISATION DE LA THÈSE

2.1 Démarche de l'ensemble du travail de recherche

La première étape a été un choix pertinent de cours utiles à la réalisation du projet de recherche : sécurité hydraulique des barrages (CIV6317), béton précontraint (CIV6504), méthodes de recherche (ING6900), mathématiques des éléments finis (MTH6207). Un projet porté sur la formulation EF du problème de Poisson sur un domaine 2D a été réalisé dans le cadre du cours de mathématiques des éléments finis; la solution EF du problème de torsion Saint-Venant a été choisi et implémenté comme application.

La participation à des conférences reliées au sujet du projet accompagnée des présentations publiques ont été organisée : Congrès annuel du Centre d'étude interuniversitaire sur les structures sous charges extrêmes, CEISCE (2008, 2009, 2010, 2011), Congrès annuel de l'Association canadienne des barrages, CDA (2008, 2010), Ninth U.S. National and tenth Canadian conference on earthquake engineering (2010), American Concrete Institute, Fall Convention, ACI (2010).

Ensuite, les sujets suivants ont été examinés dans la littérature :

- (a) construction des diagrammes d'interaction PMM,
- (b) formulation variationnelles et EF pour l'analyse sectionnelle de contraintes des sections arbitraires soumises au cisaillement biaxial et à la torsion,
- (c) comportement 3D des structures hydrauliques.

Le but final est le développement, la validation et l'application d'un modèle implémenté dans un logiciel qui peut analyser une structure hydraulique, de type poids en béton. Les piliers considérés sont soumis aux sollicitations 3D $P-M_x-M_y-V_x-V_y-T$. Tout d'abord une recherche pour obtenir des données de validation du logiciel (des résultats publiés dans la littérature, des logiciels commerciaux existants : CADAM-3D, SAP 2000, Matlab/Maple) a été entreprise.

Trois algorithmes distincts ont été développés en corrélation avec les objectifs et les trois articles constituant le coeur de cette thèse : (a) un pour le calcul de surface de rupture PMM, (b) un pour l'analyse élastique de cisaillement des sections variables soumises aux charges 3D et (c) un pour l'analyse combinée PMMVVT des sections arbitraires fissurées avec variation longitudinale arbitraire soumises aux

sollicitations arbitraires 3D incluant la torsion uniforme et non uniforme. Par la suite, ces algorithmes ont été intégrés dans un logiciel programmé à l'aide de plusieurs langages : Matlab (la partie principale), AutoLISP (partie visualisation), VBA-Excel (post processeur et analyse de fissuration). Plusieurs validations ont été faites par comparaison avec d'autres outils de calculs disponibles (formules analytiques, autres modèles numériques, exemples de la littérature). La sensibilité des algorithmes face aux difficultés reliées au comportement mécanique, discontinuités ou instabilité numérique a été examinée en détail.

Les algorithmes proposés ont été appliqués sur plusieurs exemples et sur des études de cas avec divers combinaisons de chargements distincts afin de mettre en lumière leur performance, leurs avantages et leurs limites. Enfin, trois articles ont été écrits et soumis pour publication dans la revue *Journal of Structural Engineering - ASCE* (chapitre 3), *Computers and Structures - Elsevier* (chapitre 4) et *Journal of Engineering Mechanics - ASCE* (chapitre 5). De plus, comme travail complémentaire relié au projet et en relation directe avec la pratique, on a développé avec le Centre d'expertise hydrique du Québec (CEHQ) une méthode d'analyse des barrages armés avec des ancrages passifs qui a fait l'objet d'une publication lors du Congrès annuel de l'Association Canadienne des barrages (annexe B). Cette méthode est acceptée actuellement par CEHQ comme méthode d'analyse pour les barrages ancrés avec des armatures passives.

2.2 Organisation de la thèse

Après une introduction mettant en lumière les problématiques du sujet, et les objectifs de la thèse ainsi que les contributions originales, le chapitre 1 présente une revue de la littérature. Le chapitre 2 résume la démarche du projet de recherche et l'organisation générale de ce document. Les chapitres 3, 4, et 5 contiennent les trois manuscrits des articles soumis aux revues, comme décrit ci-dessus. Ensuite, le chapitre 6 discute plus en détails divers aspects particuliers des méthodes décrites dans les articles qui n'y ont pas été inclus faute d'espace. Finalement, le chapitre 7 amène une discussion générale et le chapitre 8 présente les conclusions, les recommandations et les perspectives futures du projet. Deux annexes sont ajoutées à la fin de la thèse. L'annexe A présente les démonstrations des divers formules employées dans les articles et dans la thèse; l'annexe B présente les articles complémentaires.

CHAPITRE 3 :

ARTICLE 1 : MULTICRITERIA CAPACITY ENVELOPES FOR BIAXIAL BENDING OF CONCRETE HYDRAULIC STRUCTURES

Auteurs : Lucian Stefan et Pierre Léger

Article publié dans la revue Journal of Structural Engineering - ASCE (soumis le 16 mai 2009, accepté le 4 février 2010 et publié : Vol. 136, No. 9, Sept. 2010, pp 1035-1043).

3.1 Introduction

Structural safety assessment, as well as rehabilitation, of concrete hydraulic structures following dam safety guidelines (CDA 2007; USACE 2005, 1995; FERC 2002) is done by considering various performance indicators (cracked area, sliding safety factors, allowable tensile and compressive stresses; Fig. 3.1, Table 3.1).

In a first step, a stress analysis is performed to compute the cracking extent and the maximum compressive stresses along series of potential failure planes located most often along lift joints. In a second step, sliding safety factors are computed considering that the driving shear forces are resisted by the shear strength of the uncracked portion of the sections. The classical 2D gravity method can be extended in 3D to perform stress analyses for a single pair of axial load P and bending moments M_x , M_y (Stefan and Léger 2008).

However, it would be useful to develop multi-criteria PMM capacity envelopes for biaxial bending allowing (a) to check directly the adequacy of the section to resist P - M_x - M_y (PMM) pairs from different load combinations, (b) to establish the bending capacity of damaged or reinforced sections (RS), while comparing various rehabilitation strategies. Difficulties for the generation of the PMM diagrams arise from (a) the cracking of the section that makes the problem nonlinear, and (b) the shape of the stress-strain (σ - ϵ) law for materials requiring efficient integration schemes.

For hydraulic structures (HS) another difficulty results from the hydromechanical interaction process during cracking. The uplift pressures (UP) acting on the section are modified as a crack propagates through the section allowing pressurized water to penetrate the crack.

Table 3.1 Performance Indicators for Hydraulic Structures

Load Combination	Guideline	Return period T_r (years)	Position of resultant	Cracked area (%)	Compression stress (MPa)	Sliding safety factor
Usual	CDA 2007	$T_r \leq 50$	Within the kern	0	$< 0.3 f_c^{\dagger}$	$\geq 1.5 - 3.0$
	USACE 2005 (1995)	$T_r < 10^{\dagger}$	Middle third	0	$< 0.3 f_c^{\dagger}$	≥ 2.0
	FERC (2002)	-	Within base	-	$< 0.33 f_c^{\dagger}$	$\geq 1.5 - 3.0$
Unusual	CDA 2007	$50 < T_r \leq 1000$	-	≤ 25	$< 0.5 f_c^{\dagger}$	$\geq 1.3 - 2.0$
	USACE 2005 (1995)	$10 \leq T_r \leq 300^{\dagger}$	Middle half	≤ 25	$< 0.5 f_c^{\dagger}$	≥ 1.7
	FERC (2002)	-	Within base	-	$< 0.5 f_c^{\dagger}$	$\geq 1.25 - 2.0$
Extreme	CDA 2007 (flood)	$T_r > 1000$	Within base	-	$< 0.5 f_c^{\dagger}$	$\geq 1.1 - 1.3$
	CDA 2007 (seism)				$< 0.9 f_c^{\dagger}$	≥ 1.1
	USACE 2005 (1995)	$T_r > 300^{\dagger}$	Within base	-	$< 0.9 f_c^{\dagger}$	≥ 1.3
	FERC (2002)	-	Within base	-	$< 0.77 f_c^{\dagger}$	$\geq 1.0 - 1.3$

Notes: † USACE (1995) recommends $T_r < 2$ years for usual case, $2 \leq T_r \leq 145$ years for unusual case and $T_r > 145$ years for the extreme case; $^{\ddagger} f_c$ = concrete compressive strength.

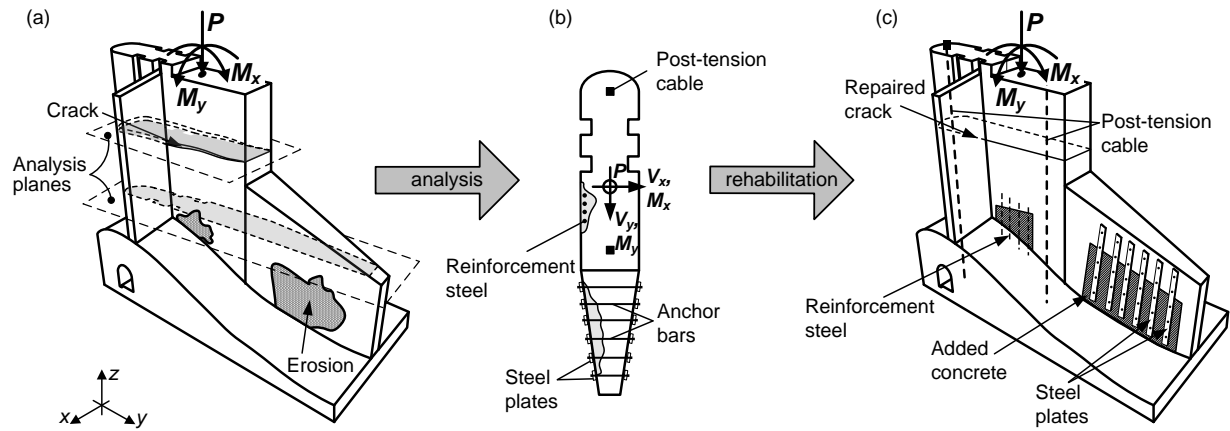


Fig. 3.1 Stability evaluation and rehabilitation of hydraulic structures: (a) structure to be analyzed; (b) sectional structural model; and (c) rehabilitated structure

Numerous techniques are available for the construction of PMM diagrams. The simplest one is a *point by point* technique [Fig. 3.2(b)]. This technique is cumbersome being used solely for sample points on the interaction surface (De Vivo and Rosatti 1998). Six independent movements are possible in the PMM space where the diagram is plotted (three translations and three rotations). Each of these movements corresponds to a *plane by plane* construction technique of the diagram. Translation along the P force, Fig. 3.2(c), that produces the so-called "MM load contours" for constant axial load, is employed by many

authors (Alfano et al. 2007; Chen et al. 2001; Izzudin and Smith 2000; Yau et al. 1993). Rotation around the P axis, that generates the "PM interaction curve" for constant moment angle $\alpha = \tan^{-1}(M_y/M_x)$, Fig. 3.2(f), is used extensively in practice and it was very well studied in the literature (Cedolin et al. 2008; Chiorean 2006; Rodriquez and Aristizabal-Ochoa 1999). However, the translation and the rotation around the moment axis M_x or M_y , Figs. 3.2(d, e, g, and h), have not received the same attention (De Vivo and Rosatti 1998).

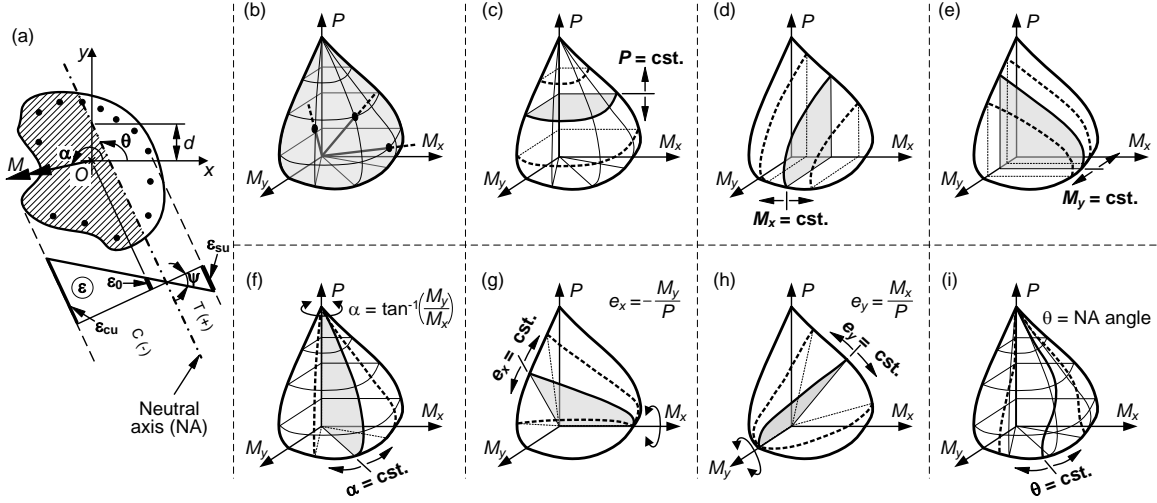


Fig. 3.2 Techniques to generate PMM envelopes: (a) computational model; (b) sample points on PMM surface; (c-e) translations along P , M_x , M_y axis; (f-h) rotations around P , M_x , M_y axis; and (i) isogonic approach

The generation of the load contours is favored when the moment curvature ($M-\psi$) for constant P is needed, but this method may prove sensitive to the selection of the origin as shown by Yau et al. (1993). A simple solution to avoid this sensitivity was proposed by Izzudin and Smith (2000). Some authors proposed algorithms to find the response of a section subjected to PMM biaxial loads without explicitly indicating the use of their algorithms to generate biaxial capacity envelopes (Stefan and Léger 2008; Bonet et al. 2006; Brondum-Nielsen 1997; Yen 1991; Kawakami et al. 1985; Kwan and Liauw 1985; Rotter 1985). To obtain a solution, all the above algorithms require a nonlinear solution strategy: Newton strategy (Chiorean 2006; Rodriquez and Aristizabal-Ochoa 1999; Brondum-Nielsen 1997), quasi-Newton strategy (Chen et al. 2001; Yau et al. 1993; Yen 1991), fixed-point strategy (Stefan and Léger 2008; Kawakami et al. 1985), secant strategy (De Vivo and Rosatti 1998) or more sophisticated strategy (Alfano et al. 2007).

The PMM diagram can also be generated using continuous no-planar curves, with the so-called "isogonic"

approach (Charalampakis and Koumoussis 2008; Sfakianakis 2002; Fafitis 2001; Marin 1979). A set of neutral axis (NA) with constant angle θ is generated to sweep the entire section. For each NA position a point on the no-planar curve (the isogonion) is computed (Marin 1979). The important advantage of this approach is the lack of nonlinear iterative computations.

The previously referred algorithms differ mainly by the solution strategy and/or the integration scheme but they share two restrictive hypothesis: (1) the *sole* limit state criterion is the maximum allowable strain ε or curvature ψ or stress σ for some selected points in the section; (2) the PMM diagram envelops *only* and *all* the points that meet the limit criterion, which infers that there is no need to check if the *inside* points satisfy the limit state criterion or if a plausible solution exists for them once the diagram is computed. These hypotheses are inappropriate for HS when there are numerous and different limit state criteria (percentage of cracked area, position of the resultant, and normal stresses) or when the effect of UP is considered. Moreover, these standard PMM diagrams offer no information about the stress-strain response of the section for an inside PMM point, in which case a nonlinear solution algorithm has to be used.

This paper presents a novel multi-criteria approach for the generation of the PMM capacity envelopes for concrete HS considering a coupled hydromechanical problem. The cross section is arbitrary and could be reinforced with passive steel or post-tensioned anchors [Fig. 3.2(a)]. An efficient way is introduced herein to identify discontinuities that were found to exist for HS within the closed 3D external contour of the envelope for certain PMM loading states. Four examples are presented for validation purposes and for the application of the proposed algorithm: plain and reinforced rectangular sections, a water intake section and a spillway pier section.

3.2 PMM Capacity Envelopes for Hydraulic Structures

HS are subjected to two kinds of loads: (1) those being independent of the section cracking: self weight, equipment weight, horizontal water thrusts, earthquake, etc.; (2) those dependent on the cracking process such as the intrusion of pressurized water in propagating cracks known as UP. For a given section of HS and limit criteria the PMM capacity envelope is no longer a section property. It becomes a *function of the UP*, so that different capacity envelopes can be generated for the same section with different UP. Moreover, *several limit state criteria* for HS should be considered for the same section (Table 3.1).

3.2.1 Section Characteristics

The sections for existing HS are various in shape, with many discontinuities and/or holes, with curved or linear boundary, often with limited passive steel reinforcement (or post-tensioned anchors when the section is strengthened) as well as embedded steel parts (Fig. 3.1). In dams built before the 1940s

undeformed bars, having limited ductility and longer development length than current bars with ridges, were sometime used. In this case FERC (1997) recommends the use of the working stress method for reinforced concrete structures. Therefore, a linear distribution of the normal stress σ is typically considered in analysis. The amount of reinforcement is often very limited and is added only to control temperature-induced cracking near the exposed surfaces.

3.2.2 Loading Combinations and Performance Indicators

International dam safety guidelines (CDA 2007; USACE 2005, 1995; FERC 2002) recommend the use of three return periods T_r to define loading combinations, for the usual normal operating conditions, the unusual conditions (blocked drains, temporary repairs, operating basis earthquake), and extreme conditions (maximum design floods and earthquakes). The structural safety is assessed by using performance indicators related to different failure mechanisms. There are three important indicators (Table 3.1) taking different values for different load combinations: (1) position of the resultant or maximum cracked area (to prevent overturning and to ensure a ligament of sufficient length for safely carrying shear stresses); (2) extreme normal stresses (to prevent concrete crushing and excessive cracking); (3) sliding safety factors (to prevent sliding).

The tensile stress limit recommended by guidelines is in general interpreted as the indicator that predicts the cracking initiation (CDA 2007). The maximum compressive stress becomes the limit criterion for envelope generation when the crack is initiated. The concrete tensile strength f'_t is typically neglected as the tension is resisted by steel bars (reinforced elements). For unreinforced structures a pure tension is unacceptable due to the floating possibility of the structure.

3.3 Generation of Multi-Criteria PMM Capacity Envelopes

The proposed method for generation of PMM capacity envelopes is applicable for arbitrary sections (various parts with discontinuities and curved boundary) containing any reinforcement distribution, post-tensioned bars and embedded steel parts. The adopted assumptions are:

1. Plane sections before deformation remain plane after deformation (linear ϵ).
2. The material behaviour is linear elastic. For any material i with Young modulus E_i a modular ratio is defined: $n_i = E_i/E_c$. This ratio is used to transform the composite section into a homogenous section having the Young modulus of concrete E_c (Wang et al. 2007).
3. The centroidal Cartesian system Gx_Iy_I is employed to compute the geometrical properties of the section as well as the planar σ_z distribution (Fig. 3.3):

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot y - \frac{M_y I_x + M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot x \quad (3.1)$$

where P =axial force; $M_x=P \cdot e_y$, $M_y=-P \cdot e_x$ =bending moments about x and y axis, with e_x , e_y being the eccentricities of P with respect to the centroid of the section; A , I_x , I_y , I_{xy} are the centroidal geometrical properties of the section: the area, the x and y moments of inertia, and the product of inertia; and x_g , y_g are the coordinates of the centroid G . These properties depend on the NA position and ratio f'_t/P ; if $f'_t = 0$, they are independent of P .

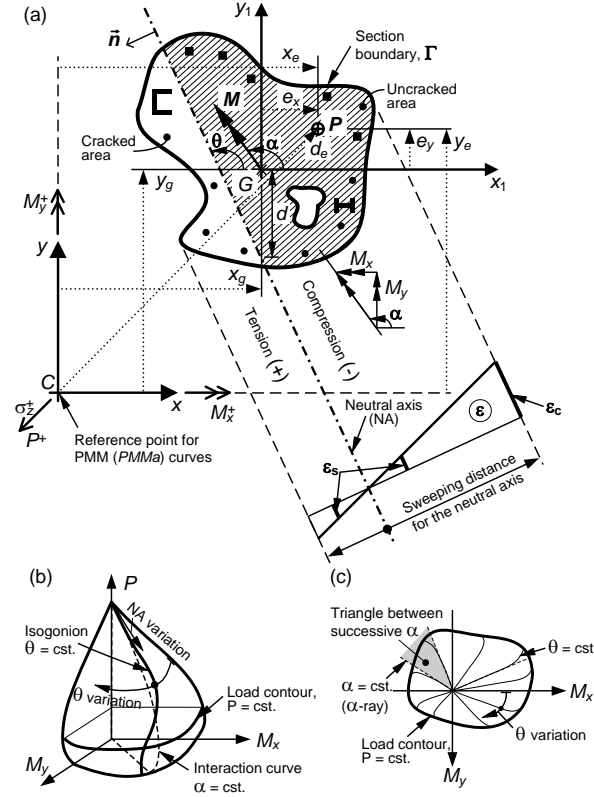


Fig. 3.3 PMM envelope generation using the isogonic approach: (a) model and notations; (b) isogonion corresponding to no-planar curves for constant θ ; and (c) MM load contour for cst. P

3.3.1 Isogonic Approach

The reasoning behind the isogonic approach is to consider all possible positions d and inclinations θ of the NA that cuts the section [Fig. 3.3(a)]. Hence, for a given NA angle θ , the NA sweeps the entire section and successively generates points on a curve called an isogonion (Marin 1979) in the PMM space (Fig. 3.3). If the section does not have a circular symmetry, the isogonion is not necessary planar due to the non proportionality between the angle of the resultant moment α and the NA angle θ :

$$\tan \alpha = \frac{\tan \theta \cdot I_y - I_{xy}}{I_x - \tan \theta \cdot I_{xy}}; \quad \left(\tan \alpha = \frac{M_y}{M_x} = -\frac{e_x}{e_y} \right) \quad (3.2)$$

The isogonion is a straight line if the NA does not cut the section, because the geometrical properties of the section do not change (zones 1 and 3 in Fig. 3.4). Thus, only two points are necessary to completely describe these zones: P_{PC} for pure compression and P_{PT} for pure tension (Fig. 3.4). For pure compression (tension) a uniform compression (tension) deformation is imposed over the entire section and the PMM resultants are computed. If the NA cuts the section then the stress distribution σ [Eq. (3.1)] is integrated over the uncracked area to obtain the PMM resultants. It was found that a minimum of twenty NA positions per constant NA angle and a minimum step of 10° between constant angles are reasonable to balance the accuracy, the necessary memory, as well as the speed of the algorithm. These values are in the range recommended by other authors (Izzudin and Smith 2000; Marin 1979). The isogonic approach permits a rapid computation of PM interaction curves, MM load contours and section response to a PMM pair.

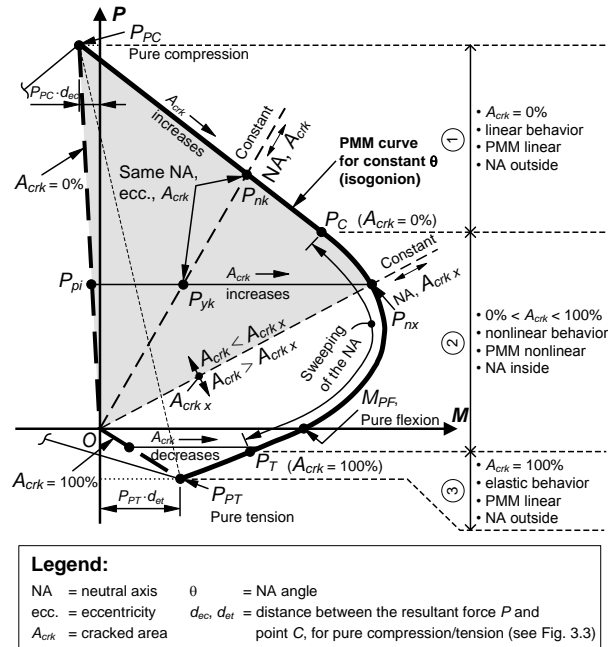


Fig. 3.4 Generation of multi-criteria PMM diagram

In the context of the above assumptions, one can mathematically prove that the NA position is *independent* of the actual PMM values being dependent *only* on geometrical quantities e_x and e_y (the eccentricities of the axial load). The NA equation has the form $a \cdot x + b \cdot y + 1 = 0$, where

$$a = \frac{A}{I_x I_y - I_{xy}^2} (e_x I_x - e_y I_{xy}); \quad b = \frac{A}{I_x I_y - I_{xy}^2} (e_y I_y - e_x I_{xy}) \quad (3.3)$$

For zero axial force, the NA does not have the above form but it satisfies another geometric condition: it passes through the centroid. In Eq. 3 the geometrical properties depend on the ratio f_t/P , if f_t is not

negligible. Eq. (3.2) that links the angle α and θ is always true and additionally $\tan \theta = -a/b$. In both cases ($P = 0$ and $P \neq 0$) the finding of the NA position for a given PMM pair can be seen as a search problem of a straight line in the geometrical space Gx_Iy_I (Fig. 3.3).

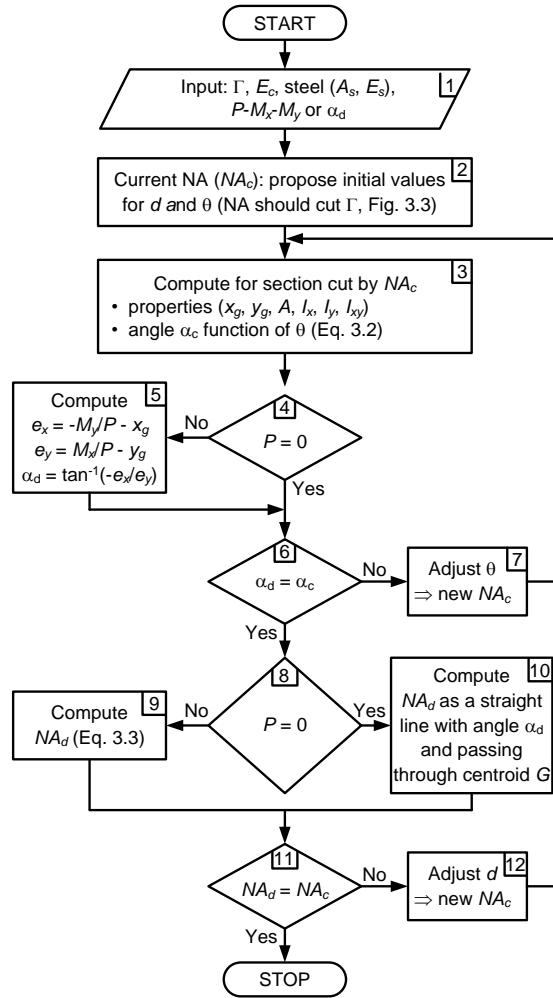


Fig. 3.5 Search algorithm to compute the NA position
for a section subjected to biaxial flexion (*GeomSearch*)

A detailed flowchart of a search algorithm based on this idea is shown in Fig. 3.5 (*GeomSearch*). The algorithm supposes that the NA cut the section. To ensure this, the PMM pair should be applied on the section that is firstly considered uncracked and secondly completely cracked. If for any of these two cases the NA falls outside of the section, then that position of the NA represents the solution; else, a trial NA is proposed and the parameters θ and d are progressively adjusted with a nonlinear solution strategy (e.g., bisection). The process stops when the trial NA and the NA obtained with Eqs. (3.2), (3.3) and geometrical properties of the section cut by the trial NA, have practically equal locations. The proposed

algorithm imposes no restriction either on the section shape, in the distribution and nature of the passive and prestressed (post-tensioned) reinforcement or in the applied biaxial loads.

Important remarks emerge from the isogonic approach and from the fact that the NA position is solely a function of the ratio $(M_y/M_x)|_{P=0}$ or $(M_y/P \text{ and } M_x/P)|_{P \neq 0}$, Fig. 3.4:

- R1: Each PMM pair belonging to a ray that starts in O in the PMM space generates the *same* NA, cracked area, and UP. For example, all points on the first (last) ray $O-P_{PC}$ ($O-P_{PT}$) correspond to pure compression (tension) with zero (complete) cracked area. The ray $O-P_{PC}$ ($O-P_{PT}$) is the *origin axis* for the compression (tension) part as the cracked area has a minimum (maximum) on this axis and increases (decreases) towards the envelope.
- R2: Any ray starting in O intersects the envelope in *exactly* one point because the solution is unique for a given eccentricity. On the positive and negative part of any axis in the PMM space only one value exists (e.g., P_{PC} and P_{PT} can not be both on the negative part of the OP axis and the moment M_{PF} is the only point on the semi-axis OM^+). Thus, the origin O is always *inside* or on the limit of the envelope. The points P_{PC} , O , and P_{PT} are collinear only if the centroid of the completely uncracked and cracked section coincides.
- R3: If the envelope is computed, the section response (NA, σ) for interior points P_{yk} is known without using a nonlinear algorithm. The movement of the point P_{nk} between $P_{PC}-P_{nx}$ is equivalent to the movement of the point P_{yk} between $P_{pi}-P_{nx}$; corresponding points $P_{yk}-P_{nk}$ have the same NA and cracked area: from zero to $A_{crk\ x}$. The movement between pure compression and pure tension monotonically produces an increase in the cracked area.

3.3.2 Consideration of Structural Performance Indicators

The three basic structural performance indicators for hydraulic structures (Table 3.1) take different allowable values for load combinations with different return periods. This imposes the generation of a PMM envelope for each indicator value. For a given section, remark R1 allows the construction of PMM diagrams for arbitrary values of any criterion and then the *scaling* of the diagram to specific values of this criterion. The diagram scalability is a useful property while dealing with the maximum allowable normal stress criterion. This is because $\sigma(k \cdot P) = k \cdot \sigma(P)$ along any ray that starts at O in the PMM space, regardless of the cracking amount of the section. Thus, an efficient PMM construction strategy is: (i) choose a NA angle and position; (ii) generate the ε plane using a unit curvature ψ ; (iii) integrate σ over the section [Eq. (3.1)] and obtain the PMM resultants; (iv) compute the normal stress value σ_{zi} for each point where the allowable stress σ_{zmi} is specified; (iv) compute the scaling factor by dividing σ_{zi}/σ_{zmi} , and divide the PMM resultants by this factor. If the diagram scaling is not possible ($f'_t \neq 0$) then concentric PMM diagrams are generated: for each NA angle and position the curvature takes consecutively values between

zero and ψ_{\max} (corresponding to allowable σ_{zm}) while PMM resultants are computed. Thus, concentric PMM diagrams, that efficiently replace the scalability of the PMM diagram, are generated for increasing σ_z .

The steel reinforcement bond slip can also be included in the PMM diagram construction algorithm. To compute the extreme axial values (pure compression and tension) one should keep the highest value of axial resultant computed for the case where the section is considered with and without reinforcement. For each NA position one should apply the limit bond stress of each reinforcement bar as a maximum stress criterion. The effect of reinforcement can be studied by comparing the PMM diagram generated for reinforced and unreinforced section, respectively.

An isogonion is constructed using a beam of rays passing through the origin O . This beam of rays starts with $O-P_{PC}$ and ends with $O-P_{PT}$ (Fig. 3.4). Each ray (e.g., $O-P_{nx}$) corresponds to a cracked area $A_{crk\ x}$ dividing the isogonion into *two parts*: the upper part (cracked areas are smaller than $A_{crk\ x}$) and the lower part (cracked areas are larger than $A_{crk\ x}$). Hence, the cracked area criterion $A_{crk\ x}$ applied on an isogonion previously generated for other criteria acts as a filter in four steps: (i) when $A_{crk\ x} = 0\%$, the isogonion is only composed of three lines $P_{PC}-P_C-O$; (ii) if $A_{crk\ x}$ is 100% the initial isogonion does not change; (iii) else, scan the isogonion to find the point P_{nx} that matches the target cracked area $A_{crk\ x}$; (iv) the final isogonion is formed by the segments $P_{PC}-P_C-P_{nx}-O$ (area above the ray $O-P_{nx}$, Fig. 3.4). If the concrete tensile strength is not negligible then the above step (iii) should be repeated for each concentric PMM envelope. The pure tension state P_{PT} may not belong to the envelope, in which case the origin O replaces it as the new common state of all PM interaction curves. Moreover, for some values of the cracked area criterion the load contour constructed for a constant tensile force can be composed of *different* closed curves as shown in a following paragraph.

Once the PMM envelope is constructed, the response of the section to any PMM point is easily obtained. Two steps are involved: (i) find the intersection point between the envelope and the ray that connects the origin and the given PMM point (the existence of this point is guaranteed by remark R2); (ii) use the NA position associated with the intersection point to compute the geometrical properties of the section (remark R3) and to compute the normal stress with (3.1).

3.3.3 Consideration of Uplift Pressures

The UP are not computed independently of the section response because they may relate to the crack propagation (Stefan and Léger 2008; CDA 2007). Thus, the *total PMM loads* may not be evaluated before starting the analysis as they are the sum of the unknown UP resultants and the known applied loads. As a

property of a section, the *standard* PMM diagram for HS (constructed for total loads) is somewhat useless because the user is not able to know a priori the total loads. Therefore, the appropriate envelope for HS (or the applied PMM labeled as *PMMa*) is not only related to a section, but also to an UP distribution, Fig. 3.6. By definition, the *PMMa* envelope generated for any given criteria contains all possible applied PMM pairs that meet the following condition: the total loads (applied loads + calculated UP), found after the analysis, produces a point *inside* the standard PMM envelope generated for the same criteria. The *PMMa* envelope offers the possibility of checking an applied PMM loading state without the burden of UP iterative evaluation upon crack propagation.

If UP is independent of cracking, the *PMMa* envelope is obtained by a translation in the PMM space with the relationship $PMMa = PMM - UP$ (Fig. 3.6a). The symbolical operation $PMM - UP$ is given by three individual differences: (1) $P - UP$; (2) $M_x - M_{x\ UP}$; (3) $M_y - M_{y\ UP}$. The translation is possible, as the envelope is only dependent on the loads ratio, but not on their actual values, as previously mentioned. If UP are a function of the NA position then a simple translation is not possible due to the variation of UP for each PMM point. In this case the *PMMa* is computed with the algorithm shown in Fig. 3.6(a). The inputs for this algorithm are the initial UP distribution (e.g., from dam safety guidelines) and PMM envelope generated for any limit criteria. The main idea of this algorithm is to divide, firstly each PMM isogonion in a number of slices [$P = \text{constant (cst.)}$]. Secondly, on each slice, move horizontally from the origin ray $O-P_{PC}$ (or $O-P_{PT}$) towards the isogonion while computing UP. For example, on the slice P_{pi} the current point P_{yk} produces the point P_{ayk} using the difference: $P_{ayk} = P_{yk} - UP_{P_{yk}}$; $UP_{P_{yk}}$ is the UP resultants computed for the NA associated to the point P_{yk} . Before starting the generation of P_{ayk} points, one can compute by a simple translation the points corresponding to pure compression and tension employing the initial UP distribution (e.g., $P_{aPC} = P_{PC} - UP_{ini}$). The translation is also applicable for all points for which the NA does not cut the section. The straight line between pure compression and pure tension ($P_{aPC} - P_{aPT}$) remains inside the *PMMa* diagram, due to remarks R1 and R2. The second task of the algorithm is to create the closed envelope *PMMa* from individual points P_{ayk} [Fig. 3.6(a)]. The first step is to divide the distance $P_{aPC} - P_{aPT}$ in n_{as} slices ($P = \text{cst.}$), and each slice in n_{at} triangles [Fig. 3.3(c)]. The ray that separates two adjacent triangles is called the α -ray. Four additional steps are required: (i) determine P_{atk} by displacing the point P_{ayk} to the nearest α -ray, based on the distance between the point and the ray (e.g., P_{ayk} is displaced on P_{ai}); (ii) keep on each α -ray only the closest and the farthest point from the origin $P_{aPC} - P_{aPT}$ (e.g., on α -ray P_{ai} the point P_{atk} is disregarded being between closest point P_m and farthest point P_M); (iii) repeat first two steps for each NA angle of the PMM; (iv) on each slice unite successive P_m points (inner load contour) and then successive P_M (outer load contour). The valid zone for a given slice contains only the points between the outer and inner load contour. The entire algorithm is applied

subsequently for all discontinuity zones z_{di} [Fig. 3.6(b)]. Finally a slice by slice intersection between valid zones of each z_{di} application is performed.

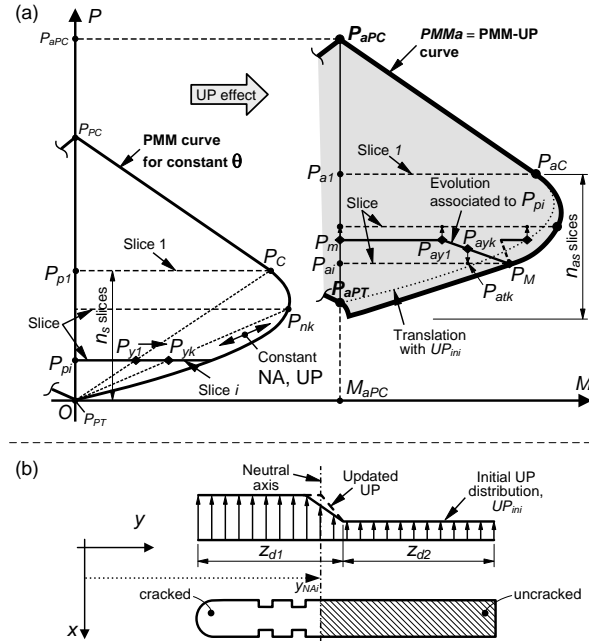


Fig. 3.6 PMM envelope considering UP: (a) envelope generation method; and (b) example of UP distribution

Observation 1: Discontinuities in the UP computation occur because the evolving UP can present a jump for two closed positions of the NA (Stefan and Léger 2008). The presence of the UP discontinuities could lead to a *PMMa* diagram composed of *separate surfaces*. Moreover, for the case of cracked area criterion A_{crk} , inside of the input PMM envelope (without A_{crk} criterion) one can identify *regions that do not belong* to the final envelope (considering the A_{crk} criterion). The proposed algorithm efficiently recognizes such particularities of the capacity envelopes, as illustrated later with an example. The originality of observation 1 resides in the fact that it invalidates the hypothesis employed by existent algorithms, which states that the outer PMM surface envelopes *only* and *all* the points that meet the limit criteria used for the PMM generation.

Observation 2: The *PMMa* envelope can symbolically be seen as the decomposition between the PMM diagram and the corresponding UP, or $PMMa = PMM - UP$. This decomposition is not necessary unique. The same point in the *PMMa* envelope can be obtained by different total PMM loads and UP. Therefore, the section response (NA, σ) to applied loads may *not be unique*. A numerical example that illustrates this particularity for HS is shown later in this paper.

3.4 Validation Examples

All the examples detailed in this paragraph were validated with analytical solutions, manual computations and software MyBiAxial when possible (Charalampakis and Koumousis 2008).

3.4.1 Plain Concrete Section

The first example presents the effect of UP on the generation of a capacity envelope. The PMM diagram of a rectangular plain concrete section using the maximum compressive stress criterion was obtained with the proposed isogonic approach and also analytically [Fig. 3.7(a2)]. The analytical curve describing this diagram, when the NA cuts the section, is: $M_x = P \cdot h/2 - 2 \cdot P^2 / (3 \cdot b \cdot \sigma_{zm})$, where h =section height; b =section width; σ_{zm} =maximum compressive stress; and $P \in [b \cdot h \cdot \sigma_{zm} / 2, 0]$. When the NA is outside of the section the PMM diagram is reduced to a straight line. To consider the UP effect on the capacity envelope the following UP distribution is proposed: $UP(y_{U1}) = 0.5$ MPa, $UP(y_{U2}) = 3$ MPa (these are not realistic values but there were chosen for a better visualization). The *PMMa* diagram is composed by three distinct diagrams: P_{j2} - P_{aPT} , P_{aPC} - P_{aPT} , P_{j1} - P_{aPT} [Fig. 3.7(a3)]. For any inside point of these three diagrams at least one solution certainly exists. However, for the points that belong to two diagrams (e.g., P_{j1} - P_{aPT} and P_{aPC} - P_{aPT}) the solution is not necessary unique. For example, for applied $P_a = -10,000$ kN and $M_{xa} = -6,100$ kNm [point P_a in Fig. 3.7(a3)] two solutions, corresponding to valid points inside de PMM diagram, are possible: $y_{NA1} = 794.915$ mm and $y_{NA2} = 3,176.921$ mm, where y_{NA} =NA location (NA angle=180°). Each solution corresponds to a different UP which explains the existence of the two solutions. Due to the non-uniqueness of the solution and of the irregular shape of the *PMMa* non-linear algorithms could encounter convergence difficulties for sectional analysis when the UP updating is included (e.g., applied force P_{j0}). However, the *PMMa* computed using the isogonic approach guaranties the existence of a solution for all points.

3.4.2 Reinforced Concrete Section

A rectangular unsymmetrically reinforced section is used on the second example to generate multi-criteria MM load contours that meet simultaneously two limit criteria: normal stresses σ_z and cracked area A_{crk} , Fig. 3.7(b). The MM load contours of this section were previously computed by Izzudin and Smith (2000) for maximum deformation criterion. The MM contours are constructed for constant axial force P_g [MM_σ for σ_z criterion and MM_A for A_{crk} , Fig. 3.7(b2)]. The MM_σ contour results from the intersection of the horizontal plane P_g with the isogonions; the MM_A contour represents the intersection of the plane P_g with the beam of rays produced for constant cracked area. The zone that satisfies both criteria (σ_z and A_{crk}) is identified with the following two rules: (a) if the axial load P_g is in compression then the valid points are those that are located simultaneously inside MM_A and MM_σ (i.e., closest to the origin point P_{pi}); (b) if P_g is tension then the valid points are located outside of MM_A but inside of MM_σ . A multi-criteria MM contours

can be formed by single closed curve [Figs. 7(b2-b3)], by outer and inner curves [Fig. 3.7(b4)] or by separate closed curves [Fig. 3.7(b5)].

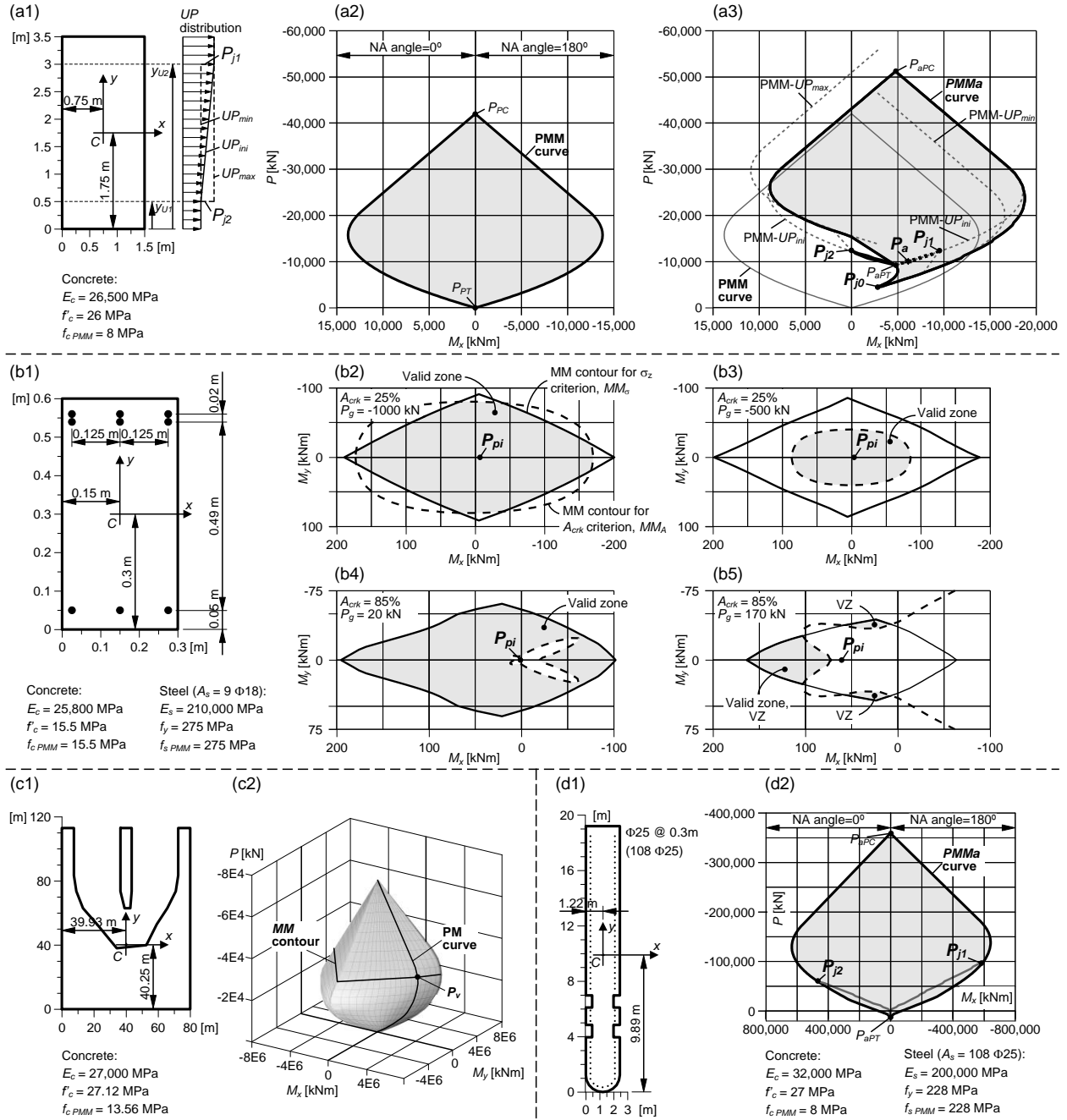


Fig. 3.7 Validation examples: (a) PMM and PMMa envelope for plain concrete section (UP effect); (b) MM load contours for reinforced concrete section with the cracked area criterion; (c) three-dimensional envelope for powerhouse section; and (d) PMMa envelope for reinforced spillway pier (UP effect)

3.4.3 Powerhouse Section

The third example (Fig. 3.7) demonstrates the capability of the proposed algorithm to generate complete 3D PMM diagrams as well as planar PM curves for given moment angle α and MM load contours for given constant axial load P . The point P_v on the outer surface corresponds to an applied force $P = -35,000$ kN with eccentricities $e_x = 35$ m and $e_y = 25$ m producing a maximum normal stress $\sigma_{zm} = f_{c\ PMM} = 13.56$ MPa. The section response for this point was previously computed with a non linear algorithm and validated manually (Stefan and Léger 2008).

3.4.4 Reinforced Spillway Pier Section

The last example [Fig. 3.7(d)] is the application of the proposed algorithm to the construction of the *PMMa* envelope of a reinforced spillway pier from an existing hydroelectric facility for upstream-downstream crack propagation. Two analysis have been done, one without steel reinforcement and the other one considering $A_s/A_g = 0.0012$ where A_s is the reinforcing area and A_g is the gross concrete section. The reinforcement layout was taken from construction drawings. Assuming that there is no initial steel stresses it was found that the ratio of the reinforced to unreinforced capacity envelope areas is 1.04. Moreover, for $P_a = -9,608.13$ kN corresponding to the applied axial force on the reinforced section the bending capacity is $M_x = 149,022$ kNm and the cracked area is 87% of the initial section. For the unreinforced section the bending capacity is reduced to $M_x = 77,950$ kNm while the cracked area increased to 95% of the section. The steel is thus beneficial to limit crack extension by about 10% of the section assuming no bond failure. The curves $P_{j1}-O$ and $P_{j2}-O$ [Fig. 3.7(d2)] mark the points for which convergence difficulties or non unique solutions can arise due to the discontinuity in the UP updating.

3.5 Summary and Conclusions

The 3D structural stability evaluation of hydraulic structures is done, in a first step, by solving a biaxial bending flexural problem [$P-M_x-M_y$ (PMM)] along potential failure planes to compute the concrete cracked areas and the related surfaces that are pressurized by the intrusion of water in cracks for normal, unusual, and extreme load combinations. This is a prerequisite to verify the safety against sliding along uncracked ligaments. For that purpose PMM interaction curves present several advantages (a) series of PMM pairs could be checked directly for adequacy, and (b) the gain or reduction in strength due to reinforcement or sectional damage could be quantified for a complete range of PMM possibilities including the effects of uplift pressure if need be. However, classical algorithms for reinforced concrete elements are not adapted to generate PMM interaction curves for hydraulic structures.

An efficient and original algorithm has therefore been developed herein to construct PMM interaction envelopes for concrete hydraulic structures. The algorithm is consistent with the allowable stress approach

considering linear strain distributions as well as the hypothesis that plane sections remain plane. The algorithm is able to respect multi performance criteria specified in dam safety guidelines for concrete hydraulic structures within the context of a coupled hydromechanical nonlinear problem. The proposed algorithm is based on the isogonic approach where the neutral axis takes a series of positions to find equilibrium solutions. The isogonic solution technique is found to be robust when hydromechanical problems are solved. For the special case where the tensile strength is zero and the uplift pressures are constant (not evolving with cracking, e.g. in a seismic problem) it is shown that the PMM envelopes can be scaled for different values of uplift pressures occurring along different potential failure planes.

Careful convergence studies have shown that in some instances where the uplift pressures are evolving with cracking, the equilibrium solution is not unique but becomes path dependent. It is clear that regardless of the technology used to solve the equilibrium equations (direct application of strength of materials or finite elements) this finding pose a challenge to develop robust solution strategies for coupled hydromechanical problems. Furthermore, the maximum cracked area criterion (e.g., 85% of the surface of the potential failure) can lead to MM load contours composed by distinct closed surfaces where equilibrium solutions are possible.

For hydraulic structures the applied axial loads P are very small as compared to the axial capacity ($f'_c \cdot A_g$) such that PMM interactions at low P are controlling the response for typical loading combinations. However, extensive cracking promote the development of large localized compressive stresses. For an existing spillway pier build in the 1920's and still in operation today it is shown that the peripheral reinforcing steel for surface cracking control is producing a limited contribution to the flexural capacity of the section.

The proposed algorithm forms the basis of a general framework that could be generalized to include nonlinear stress-strain material law over the cross section.

3.6 Acknowledgments

The financial support provided by Quebec Fund for Research on Nature and Technology, (FQRNT), and Natural Science and Engineering Research Council of Canada is acknowledged.

3.7 References

Alfano, G., Marmo, F., and Rosati, L. (2007). "An unconditionally convergent algorithm for the evaluation of the ultimate limit state of RC sections subject to axial force and biaxial bending." *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 72(8), 924-963.

Bonet, J. L., Barros, M. H. F. M., and Romero, M. L. (2006). "Comparative study of analytical and numerical algorithms for designing reinforced concrete sections under biaxial bending." *Comput. Struct.*, 84(31-32), 2184-2193.

Brondum-Nielsen, T. (1997). "Serviceability analysis of concrete sections under biaxial bending." *J. Struct. Eng.*, 123(1), 117-119.

Canadian Dam Association (CDA). (2007). *Dam safety guidelines*, Edmonton, Alberta, Canada.

Cedolin, L., Cusatis, G., Eccheli, S. L., and Roveda, M. (2008). "Capacity of rectangular cross sections under biaxially eccentric loads." *ACI Struct. J.*, 105(2), 215-224.

Charalampakis, A. E., and Koumousis, V. K. (2008). "Ultimate strength analysis of composite sections under biaxial bending and axial load." *Adv. Eng. Software*, 39(11), 923-936.

Chen, S. F., Teng, J. G., and Chan, S. L. (2001). "Design of biaxially loaded short composite columns of arbitrary section." *J. Struct. Eng.*, 127(6), 678-685.

Chiorean, C. G. (2006). "Computerised interaction diagrams for composite cross-sections of arbitrary shape." *Proc., Int. Conf. in Metal Structures: Steel - A New and Traditional Material for Building*, Taylor and Francis, D. Dubina and V. Ungureanu, eds., Poiana Brasov, Romania, 357-364.

De Vivo, L., and Rosati, L. (1998). "Ultimate strength analysis of reinforced concrete sections subject to axial force and biaxial bending." *Comput. Method. Appl. M.*, 166(3-4), 261-287.

Fafitis, A. (2001). "Interaction surfaces of reinforced-concrete sections in biaxial bending." *J. Struct. Eng.*, 127(7), 840-846.

Federal Energy Regulatory Commission (FERC). (2002). "Chapter 3: Gravity dams." *Engineering guidelines for the evaluation of hydropower projects*, Dept. of Energy, Washington, D.C.

FERC (1997). "Chapter 10: Other dams." *Engineering guidelines for the evaluation of hydropower projects*, Dept. of Energy, Washington, D.C.

Izzuddin, B. A., and Lloyd Smith, D. (2000). "Efficient nonlinear analysis of elasto-plastic 3D R/C frames using adaptive techniques." *Comput. Struct.*, 78(4), 549-573.

- Kawakami, M., Tokuda, H., Kagaya, M., and Hirata, M. (1985). "Limit states of cracking and ultimate strength of arbitrary concrete sections under biaxial loading." *ACI J.*, 82(2), 203-212.
- Kwan, K. H., and Liauw, T. C. (1985). "Computerized ultimate strength analysis of reinforced concrete sections subjected to axial compression and biaxial bending." *Comput. Struct.*, 21(6), 1119-1127.
- Marin, J. (1979). "Design aids for L-shaped reinforced concrete columns." *ACI J.*, 76(11), 1197-1216.
- Rodriguez, J. A., and Dario Aristizabal-Ochoa, J. (1999). "Biaxial interaction diagrams for short RC columns of any cross section." *J. Struct. Eng.*, 125(6), 672-683.
- Rotter, J. M. (1985). "Rapid exact inelastic biaxial bending analysis." *J. Struct. Eng.*, 111(12), 2659-2674.
- Sfakianakis, M. G. (2002). "Biaxial bending with axial force of reinforced, composite and repaired concrete sections of arbitrary shape by fiber model and computer graphics." *Adv. Eng. Software*, 33(4), 227-242.
- Stefan, L., and Léger, P. (2008). "Extension of the gravity method for 3D cracking analysis of spillway piers including uplift pressures." *J. Struct. Eng.*, 134(8), 1278-1287.
- U.S. Army Corps of Engineers (USACE). (2005). "Chapter 3: Stability requirements." *Engineering and design: Stability analysis of concrete structures - Rep. EM 1110-2-2100*, Washington, D.C.
- USACE (1995). *Engineering and design: Gravity dam design - Rep. EM 1110-2-2200*, Washington, D.C.
- Wang, C. K., Salmon, C. G., and Pincheira, J. A. (2007). "Chapter 4: Rectangular sections in bending under service load conditions." *Reinforced Concrete Design*, 7th Ed., John Wiley & Sons, Inc., USA, 95-117.
- Yau, C. Y., Chan, S. L., and So, A. K. W. (1993). "Biaxial bending design of arbitrarily shaped reinforced concrete column." *ACI Struct. J.*, 90(3), 269-278.
- Yen, J. Y. R. (1991). "Quasi-Newton method for reinforced-concrete column analysis and design." *J. Struct. Eng.*, 117(3), 657-666.

CHAPITRE 4 :

ARTICLE 2 : ELASTIC SECTIONAL STRESS ANALYSIS OF VARIABLE SECTION PIERS SUBJECTED TO THREE-DIMENSIONAL LOADS

Auteurs : Lucian Stefan et Pierre Léger

Article soumis dans la revue Computers and Structures - Elsevier (soumis le 12 avril 2011).

4.1 Introduction

Several structures are made from the assembly of tapered elements with sections possessing a uniaxial symmetrical axis with arbitrary boundaries (Fig. 4.1). These structures are subjected to 3D load combinations. For spillway piers [Fig. 4.1(d)] those are arising from operational conditions, earthquakes or lateral impact of ice floes. Thus, 3D actions imparted by P (axial), M_x , M_y (moments), V_x , V_y (shear forces) and T (torsion) loads must be considered in stress analysis. Elastic normal and shear stress distributions are first computed in safety assessment. Solutions for elastic normal stresses arising from the *PMM* problem are well known for arbitrary cross-sections [1, 2, 3].

Solutions for the shear stresses arising from the *VVT* problem are more complex involving warping of the section [4, 5, 6]. For structures with variable sections along the vertical axis, such as typical hydraulic structures (Fig. 4.2), it is useful to perform first series of sectional analyses along the height to assess the stress field for critical planes, such as concrete lift joints, before undergoing three dimensional finite element (FE) analyses, if necessary.

Mason and Herrmann 1968 [7] presented a general method for sectional analysis including warping of arbitrary *constant section elements* due to biaxial *shear forces*; for these elements, a FE formulation for Saint-Venant *torsion* was also proposed by Herrmann 1965 [8]. Sapountzakis and Mokos 2004 [9] suggested an *estimative* formulation for sectional analysis of *variable section* elements subjected to *non-uniform torsion*.

However, there is no formulation for sectional analysis of variable section columns subjected to three-dimensional loads, P - V_x - V_y - M_x - M_y - T , having arbitrary deformation patterns (coupled "wall"/in-plane and "plate"/out-of-plane behaviors).

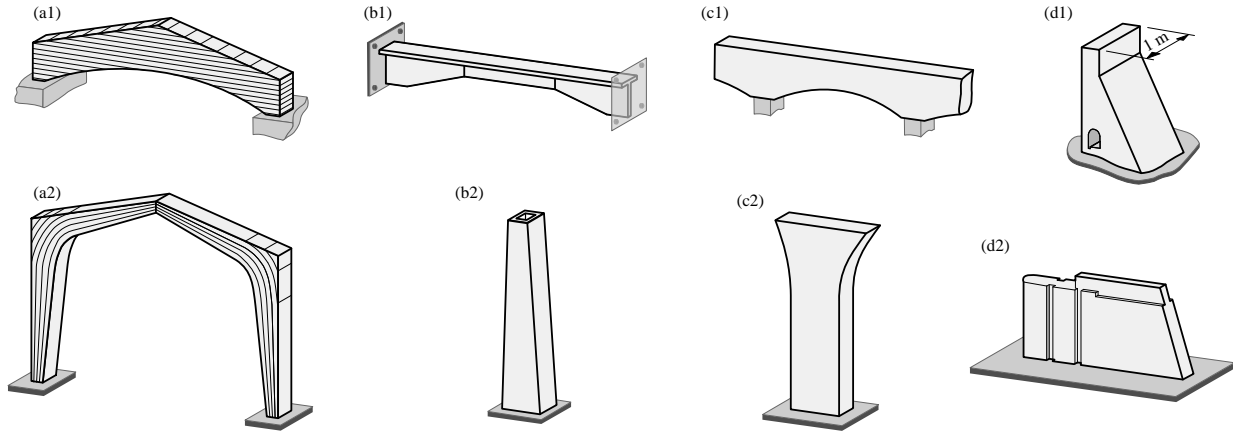


Fig. 4.1 Structural elements with variable sections made of (a) wood, (b) steel, and (c) reinforced concrete; (d1) unit slice of a concrete dam, and (d2) spillway pier.

4.1.1 Review of previous work

Shear stresses τ are generally produced by the presence of a shear force or of a torsion moment which represents the resultant of these shear stresses. When stresses produce neither force nor moment as resultant, the distribution is *self-equilibrated*. For example, this situation arises for the normal stresses σ due to the non-uniform torsion when they have no resultant force or bending moment [9]. The shear distribution determination for variable section elements can be seen as the search of a self-equilibrated stress field which is added to the shear distribution found for the constant section; thus, the self-equilibrated field can be interpreted as a correction to the stress field for constant section [10].

The problem of finding the shear stress of constant section elements is separated in two boundary value problems: one for the shear force without torsion, and the other for the pure torsion moment [5, 11, 12]. The analytical solution for the wedge loaded at its apex was employed to solve the shear problem for variable section elements [11, 13, 14]. When the hypotheses of plane stress are satisfied, based on equilibrium equations (neglecting Poisson ratio) of the Theory of Elasticity (TE) the analytical solution for shear stresses was determined for sections subjected to uniaxial shear force [15, 16, 17]. Analytical solutions using asymptotic techniques are also available for variable sections subjected to three-dimensional loads as long as the beam length approaches infinity [18]. Several authors utilize the idea of the Jourawski formula for equilibrium conditions written for variable section elements to determine analytically the shear stress [10, 19, 20, 21]; this solution is well adapted to design due to its accessible form and generalization for one-dimensional stress states. Another strategy to find shear stresses is to propose a shear distribution and to check it against equilibrium conditions [10, 22]. The above mentioned methods were validated experimentally or with finite element (FE) formulations [10, 16, 21]. For constant

section elements, various FE solutions for finding the shear stress distribution on arbitrary sections are available either based on warping or on stress functions [4, 5, 7, 12, 23]. An abundant literature is found for the *matrix analysis* of variable section elements subjected to three-dimensional loads [10, 24, 25, 26, 27, 28]. The matrix analysis is developed on energy principles where only the product between *stress* and *strain* is accounted for. From this point of view, the *actual* stress distribution is not important as long as the same energy is computed with two different distributions; the lack of identical satisfaction of boundary conditions at section level is also of no concern. If a particular distribution is validated by using an energy indicator (e.g., displacement) then the distribution is considered acceptable [29, 30, 31, 32]. This is the case of the Timoshenko coefficient [6, 33] or the transformation of continuously variable elements in stepped variable elements as often done in practice. For sectional stress analysis this energetic equivalence is not directly useful because the *accurate* distribution is desired. However, none of the above methods deals with three-dimensional loading scenario P - V_x - V_y - M_x - M_y and arbitrary column displacements.

The evaluation of shear stresses due to torsion T was addressed by many authors especially for thin-walled bars. The solution for uniform torsion (without normal stresses) was mathematically solved by Saint-Venant and later formulated in FE using warping or stress functions [8, 34, 35, 36]. The warping or non-uniform torsion produces self-equilibrated normal stress along the bar as well as shear stresses due to the normal stress variation. The solution for warping torsion was discussed for both constant and variable section elements [9, 37, 38, 39]. However, the real 3D boundary unit normal and the z variation of warping function were neglected.

This paper provides a uniform and general FE formulation for the sectional analysis of variable sections structural elements subjected to three-dimensional loads. The element has arbitrary unidirectional longitudinal variability and arbitrary uniaxial symmetrical cross section. It accounts for: (a) compatibility and equilibrium equations with respect to material law (initially limited to isotropic linear elastic material); (b) boundary conditions of the actual 3D element geometry; and (c) Poisson ratio. To validate the proposed sectional analysis method three applications are shown ranging from a typical tapered rectangular section pier to the more challenging analysis of a squat wall. The implementation of this sectional approach for variable geometry in existent sectional analysis software of constant section elements can be directly performed using the developments presented herein.

4.2 Problem formulation and solution strategy

The main idea of the proposed method is that the sectional analysis at elevation z of a column with variable section can be performed at the same elevation z of a constant section column by extending the

differential formulation of Euler-Bernoulli beam theory including warping deformation. There are three conditions to satisfy: (a) the constant section must be identical with the section at elevation z ; (b) the function in the right term of the differential equation must account for the variation of the geometrical properties of the section, and (c) the boundary conditions must respect the spatial variable geometry. By doing this, existing software developed for sectional analysis of constant section columns can be modified to analyze variable section columns. In this paper, the meaning of "column" is "structural element" subjected to three-dimensional forces: P - V_x - V_y - M_x - M_y - T .

The following assumptions of the proposed method create the framework for the presentation. These assumptions are (Fig. 4.2):

- (a) Plane sections before deformation for bending remain plane after deformation (linear ϵ , σ).
- (b) The section is symmetrical according to Ox ; along the element height (Oz) the section size can vary in the Ox direction but cannot change in the Oy .
- (c) The centroidal Cartesian system Oxy is employed to compute the geometrical properties of the section as well as the planar σ_z distribution (isotropic linear elastic material):

$$\sigma_z(x, y, z) = -E(\sigma_{0z}(z) + \sigma_{1z}(z)(x - x_g(z)) + \sigma_{2z}(z)y) \quad (4.1)$$

$$\sigma_{0z}(z) = -\frac{1}{E} \cdot \frac{P}{A(z)} \quad (4.2)$$

$$\sigma_{1z}(z) = -\frac{1}{E} \left(\frac{-M_y + Pe_x - V_x(L - L_s - z) + P(x_{gP} - x_g(z))}{I_y(z)} \right) = -\frac{1}{E} \cdot \frac{RM_y(z)}{I_y(z)} \quad (4.3)$$

$$\sigma_{2z}(z) = -\frac{1}{E} \left(\frac{M_x + Pe_y - V_y(L - L_s - z)}{I_x(z)} \right) = -\frac{1}{E} \cdot \frac{RM_x(z)}{I_x(z)} \quad (4.4)$$

$$RM_x(z) = -M_x - Pe_y + V_y(L - L_s - z) \quad (4.5)$$

$$RM_y(z) = M_y - P(e_x + x_{gP} - x_g(z)) + V_x(L - L_s - z) \quad (4.6)$$

where all the forces are applied on the centroid of the top section: P =axial force; e_x, e_y =eccentricities of P with respect to the centroid of top section; M_x, M_y =concentrated bending moments; V_x, V_y =shear forces; x_g, A, I_x, I_y are the centroidal coordinates and geometrical properties of the current section: the area, and the x and y moments of inertia (they are z functions); x_{gP} is the centroid coordinate of the top section; L, L_s is the column height and respectively the position of the reference section according to the column base; E is the Young modulus; ν is the Poisson ratio. Note that RM_y represents the resultant M_y moment on the section, while RM_x is the algebraic opposite of the resultant M_x moment; they should be seen only as notations.

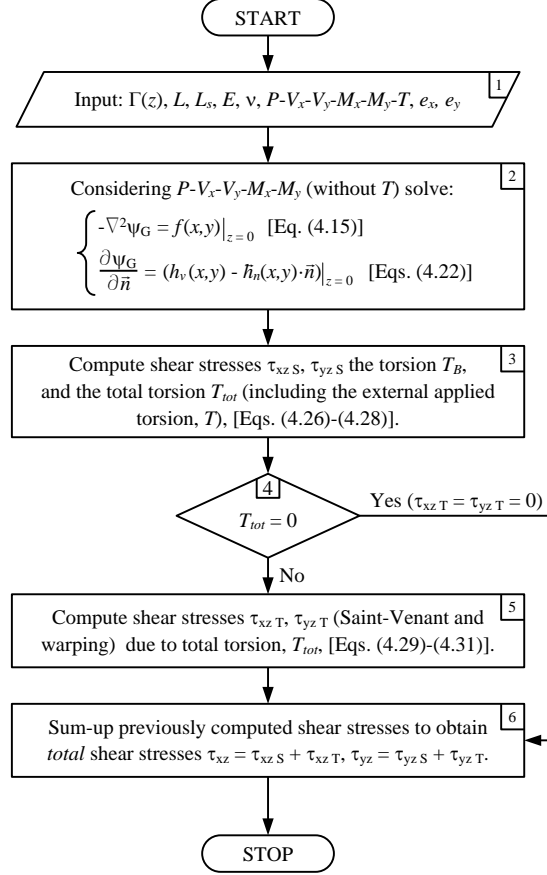


Fig. 4.3 Algorithm to compute, for structural elements with variable section, the shear stresses due to three-dimensional loads.

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)); & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\
 \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)); & \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G}; & G &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\
 \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)); & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G}
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

From the TE [11], the equilibrium equations and boundary conditions of a solid in a three-dimensional stress state are (the normal and shear stresses are denoted by σ and τ):

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

$$\begin{cases} \sigma_x l_s + \tau_{xy} m_s + \tau_{xz} n_s = 0 \\ \tau_{xy} l_s + \sigma_y m_s + \tau_{yz} n_s = 0 \\ \tau_{xz} l_s + \tau_{yz} m_s + \sigma_z n_s = 0 \end{cases} \quad (4.9)$$

In (4.9) l_s , m_s , n_s are the direction cosines of the external normal to the surface of the body at the point under consideration (they are the component of the unit normal vector $\vec{n}_s = \langle l_s, m_s, n_s \rangle$); the unit outward normal vector of the boundary curve Γ is $\vec{n} = \langle l, m, n \rangle$.

4.2.2 Strong form for shear without torsion

From (4.7), by imposing $\sigma_x = \sigma_y = 0$, the displacement distribution is determined by integration (the form of arbitrary functions $\phi(y, z)$ and $\varphi(x, z)$ comes from the condition $\gamma_{xy} = 0$):

$$u(x, y, z) = -\frac{\nu}{E} \int \sigma_z dx + \phi(y, z); \quad \phi(y, z) = -\nu \sigma_{1z} \frac{y^2}{2} - \theta(z)y + b_u(z) \quad (4.10)$$

$$v(x, y, z) = -\frac{\nu}{E} \int \sigma_z dy + \varphi(x, z); \quad \varphi(x, z) = -\nu \sigma_{2z} \frac{x^2}{2} + \theta(z)x + b_v(z) \quad (4.11)$$

$$w(x, y, z) = -\int (\sigma_{0z} + \sigma_{1z}(x - x_g) + \sigma_{2z}y) dz + \psi(x, y) \quad (4.12)$$

The function $\psi(x, y)$ is the sought warping function. The shear strains are computed with the above displacements substituted in (4.7):

$$\gamma_{xz} = \nu \left(x \frac{d\sigma_{0z}}{dz} + \left(\frac{x^2 - y^2}{2} - x_g x \right) \frac{d\sigma_{1z}}{dz} - x \sigma_{1z} \frac{dx_g}{dz} + xy \frac{d\sigma_{2z}}{dz} \right) - y \frac{d\theta}{dz} + \frac{db_u}{dz} - \int \sigma_{1z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4.13)$$

$$\gamma_{yz} = \nu \left(y \frac{d\sigma_{0z}}{dz} + (x - x_g) y \frac{d\sigma_{1z}}{dz} - y \sigma_{1z} \frac{dx_g}{dz} + \frac{y^2 - x^2}{2} \cdot \frac{d\sigma_{2z}}{dz} \right) + x \frac{d\theta}{dz} + \frac{db_v}{dz} - \int \sigma_{2z} dz + \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (4.14)$$

Until Eq. (4.12) there is no difference between the formulations for constant and variable section columns. The difference appears only in (4.13) and (4.14) in the derivatives of σ_{1z} and x_g . The terms in $\theta(z)$ pertain to torsion and are neglected in the determination of the warping function for shear; they will be included in the hereinafter formulation for torsion.

The compatibility equations need not be considered as the differential formulation is based on an assumed displacement field, Eqs. (4.10)-(4.12) [11, p. 296]. When the normal stress σ_z (4.1) and shear stresses τ_{xz} , τ_{yz} (4.7), (4.13), and (4.14) are used in the third equilibrium equation (4.8) the following Poisson differential equation is derived ($\psi_G = \psi \cdot G$):

$$\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \bigg|_{z=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\nabla^2 \psi_G = f(x, y) \big|_{z=0} \quad (4.15)$$

The analyzed section is located at the elevation $z = 0$. The function $f(x, y)$ is thus:

$$f(x, y) = -2G \left(\frac{d\sigma_{0z}}{dz} + (x - x_g) \frac{d\sigma_{1z}}{dz} - \sigma_{1z} \frac{dx_g}{dz} + y \frac{d\sigma_{2z}}{dz} \right) \Big|_{z=0} \quad (4.16)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{1+\nu} \left(x \cdot \frac{V_x}{I_y} + y \cdot \frac{V_y}{I_x} + x \cdot f_{1lyP} + y \cdot f_{1x} + f_{2lyP} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \quad (4.17)$$

$$f_{1x} = \frac{RM_x}{I_x^2} \cdot \frac{dI_x}{dz}; \quad f_{1ly} = \frac{RM_y}{I_y^2} \cdot \frac{dI_y}{dz}; \quad f_{2ly} = \frac{RM_y}{I_y} \cdot \frac{dx_g}{dz} \quad (4.18)$$

$$f_{1P} = -\frac{P}{A^2} \cdot \frac{dA}{dz}; \quad f_{2P} = -\frac{P}{I_y} \cdot \frac{dx_g}{dz}; \quad f_{1lyP} = f_{1ly} + f_{2P}; \quad f_{2lyP} = f_{2ly} + f_{1P} \quad (4.19)$$

The last three terms in (4.17), denoted f_i , are detailed in (4.18) and (4.19). They are constant over the Oxy , as they are only z functions. For constant section columns, all f_i functions are zero, and (4.17) becomes the function for shear analysis of prismatic bars. The functions f_i can be computed analytically or more general numerically as they are functions of only one variable, z . The solution of (4.15) accounts for the displacements due to three-dimensional forces and moments P - V_x - V_y - M_x - M_y : the "wall" behavior (u , w displacements and θ_y rotation), the "plate" behavior (v , w , θ_x), as well as the coupled three-dimensional behavior (u , v , w , θ_x , θ_y). The shear stresses due to applied torsion and total shear stresses are detailed in following sections as depicted in Fig. 4.3.

4.2.3 Limit boundary conditions

The boundary conditions (4.9) have to be included in the formulation of the differential problem (4.15). The domain for the boundary conditions and the differential equation is not the same: the domain is 3D ($Oxyz$) for (4.9) and it is 2D (Oxy) for (4.15). Thus, a transformation of the boundary is needed. Let the outside surface boundary of the column be: $\Omega(x, y, z) = F_1(x, y) + F_2(z) = 0$; most surfaces representing real columns can be put in this form (plane, polynomial variation, etc.). The intersection between this surface and the plane Oxy is a cross-section boundary formed by the closed curve $\Gamma(x, y) = F_1(x, y) + F_2(L_s) = 0$. The components of the outward unit normal vector \vec{n}_s of the surface Ω and respectively \vec{n} of the curve Γ are, Fig. 4.2(b3), [40]:

$$\vec{n}_s = \left\langle \frac{F'_{1x}}{\underbrace{L_{ns}}_{n_{sx}=l_s}}, \frac{F'_{1y}}{\underbrace{L_{ns}}_{n_{sy}=m_s}}, \frac{F'_{2z}}{\underbrace{L_{ns}}_{n_{sz}=n_s}} \right\rangle, \quad L_{ns} = \sqrt{F'^2_{1x} + F'^2_{1y} + F'^2_{2z}}; \quad \vec{n} = \left\langle \frac{F'_{1x}}{\underbrace{L_n}_{n_x=l}}, \frac{F'_{1y}}{\underbrace{L_n}_{n_y=m}} \right\rangle, \quad L_n = \sqrt{F'^2_{1x} + F'^2_{1y}} \quad (4.20)$$

The relationship between \vec{n}_s and \vec{n} is found by eliminating the derivatives F'_{1x} and F'_{1y} between both vectors in (4.20). The ratios L_n / L_{ns} and F'_{2z} / L_{ns} represent the sine and cosine of the angle between the

normal and the horizontal, α_n [ANED, Fig. 4.2(b3)]:

$$\vec{n}_s = \left\langle l \frac{L_n}{L_{ns}}, m \frac{L_n}{L_{ns}}, \frac{F'_{2z}}{L_{ns}} \right\rangle = \langle l \cdot \cos(\alpha_n), m \cdot \cos(\alpha_n), \sin(\alpha_n) \rangle \quad (4.21)$$

For the variable sides of the column, if the surface Ω_u (Ω_d) is planar, then the angle α_n is identical with α_u (α_d), Fig. 4.2(b1). As the positive direction for α_u and α_d is not the same, in (4.9), the tangent of α_n should be multiplied by l , the x component of the normal vector of Γ . The third equation of the (4.9) as well as the boundary conditions for the differential equation (4.15) now become (the symbol " \cdot " means *vector product* when it multiplies two vectors):

$$(\tau_{xz}l + \tau_{yz}m = -\sigma_z \cdot \tan(\alpha_n))|_{z=0} \Rightarrow \frac{\partial \Psi_G}{\partial \vec{n}} = \left(h_v(x, y) - \vec{h}_n(x, y) \cdot \vec{n} \right)|_{z=0} \quad (4.22)$$

$$h_v(x, y) = -\sigma_z \cdot \tan(\alpha_n); \vec{h}_n(x, y) = \langle h_{nx}, h_{ny} \rangle \quad (4.23)$$

$$h_{nx}(x, y) = -\frac{\nu}{2(1+\nu)} \left(\frac{x^2 - y^2}{2} \cdot \frac{V_x}{I_y} + xy \frac{V_y}{I_x} + x \cdot f_{2lyP} + \frac{x^2 - y^2}{2} \cdot f_{1lyP} + xy \cdot f_{lx} \right) \quad (4.24)$$

$$h_{ny}(x, y) = -\frac{\nu}{2(1+\nu)} \left(xy \frac{V_x}{I_y} - \frac{x^2 - y^2}{2} \cdot \frac{V_y}{I_x} + y \cdot f_{2lyP} + xy \cdot f_{1lyP} - \frac{x^2 - y^2}{2} \cdot f_{lx} \right) \quad (4.25)$$

For constant sections, the functions f_i are zero and (4.22) describes the boundary conditions for prismatic bars. Moreover, if the Poisson ratio ν is assumed to be zero, then the vector function \vec{h}_n is zero and the formulation is identical with the one when only equilibrium equations are integrated [15]. The terms containing the functions θ , b_u , b_d in (4.13), (4.14) are neglected for the vector function $\vec{h}_n(x, y)$ because: (a) the terms in θ relies on torsion formulation, which is discussed in a next paragraph; and (b) the derivatives of b_u and b_d evaluated for $z = 0$ are some constants and they do not influence the value of shear stresses as they are known from equilibrium equations on the boundary (these functions play a role on the boundary conditions at the column extremities).

To find the shear stresses distribution due to the application of three-dimensional forces P - V_x - V_y - M_x - M_y without torsion one should solve the strong form of the problem described by equation (4.15) with boundary conditions (4.22). Furthermore, with the help of component h_{nx} and h_{ny} the correspondent shear stresses are (the subscript s is used to indicate that shear stresses come from a differential formulation for shear without torsion):

$$\tau_{xzS} = \frac{\partial \Psi_G}{\partial x} + h_{nx}; \quad \tau_{yzS} = \frac{\partial \Psi_G}{\partial y} + h_{ny} \quad (4.26)$$

4.2.4 Torsion due to section variability

The shear distribution computed with Eq. (4.26) neglects the presence of torsion. The torsion is considered in the next step. For variable section columns there are three sources for torsion:

- (i) The externally applied torsion T .
- (ii) The internal torsion $V_y \cdot x_{gP}$ due to the difference between the centroid of the section where the shear force V_y is applied and the reference section, Fig. 4.2(a).
- (iii) The torsion T_B due to the integral of shear stresses computed for shear without torsion (previous paragraph). This torsion can be interpreted conceptually as being produced by the difference between the centroid and the shear center of the reference section. The shear center D_v for a section being part of a variable section column is no longer a sectional property as classically assumed by the Theory of Elasticity [9, 11]. The same section part of different 3D configurations issues different "shear centers" as direct consequence of the boundary conditions Eq. (4.22) that impose to the warping function a dependency on the outside 3D normal of the section. Note that T_B can be non zero even if no shear force is applied. If the shear forces are zero the shear center is not geometrically well-defined but T_B can still exist. For example, if a variable section pier is subjected to pure axial force the normal stresses are computed with the formula $\sigma = P / A(z)$. Due to the z variability of the area $[A(z)]$ the normal stresses present also a z variability (contrary to a constant section element where the application of pure axial force produces constant normal stresses); the z variation of the *normal stresses* generates *shear stresses* that can furthermore generate a torque. Thus, even without applying a shear force the torsion appears in the section (this internal torsion is self-equilibrated as no external torsion was applied). For this case T_B is non zero but the shear center D_v classically defined is not geometrically well-defined as it implies a division by zero; e.g., $x_{Dv} = T_B / V_y$ and $V_y = 0$. Hence, for variable section elements the presence of internal torsion and associated shear stresses on a section can not be judged based only on the presence of shear forces [41].

The total applied torsion is the algebraic sum of the three previous sources of torsion. As T_B is *produced* by the integral of shear stresses τ_{xzS} and τ_{yzS} , to reestablish the torsional equilibrium T_B must be applied in the opposite direction; thus, the sign of the *applied* T_B is negative. The component T_B is computed numerically.

$$T_B = \int_{A(z=0)} (-\tau_{xzS} \cdot y + \tau_{yzS} \cdot x) dA; \quad x_{Dv} = \frac{T_B}{V_y}; \quad y_{Dv} = -\frac{T_B}{V_x}; \quad (4.27)$$

$$T_{tot} = T + V_y \cdot x_{gP} - T_B \quad (4.28)$$

The total torsion T_{tot} is furthermore applied on the section to evaluate the shear stresses due to pure torsion (τ_{xzT} and τ_{yzT}).

4.2.5 Uniform and non-uniform torsion considerations

At sectional level, the total applied torsion T_{tot} is resisted by two mechanisms: (a) the Saint-Venant (uniform) torsion when the section is free to warp; and (b) the warping (non-uniform) torsion when the sectional warping is restrained. The main difference between these mechanisms is that for the first one there are no normal stresses on the section while for the second one the normal stresses are not null. In this paper, the evaluation of shear stresses due to torsion for variable section follows the method described by Sapountzakis and Mokos 2004 [9]. It consists in the separation of the uniform and non-uniform torsion in two separate problems related to two warping functions (the primary and the secondary one). The strong form of these two problems is (for more details see [9]):

$$\begin{cases} -\nabla^2 \Psi = 0 \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n} = (y \cdot l - x \cdot m) \Big|_{z=0} \end{cases} \quad \text{with } \tau_{xzsV} = G \frac{d\theta}{dz} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} - y \right); \tau_{yzsV} = G \frac{d\theta}{dz} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} + x \right) \quad (4.29)$$

$$\begin{cases} -\nabla^2 \Psi_s = \left(2(1+\nu) \cdot \frac{d^3 \theta}{dz^3} \cdot \Psi \right) \Big|_{z=0} \\ \frac{\partial \Psi_s}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \text{with } \sigma_{zw} = E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \cdot \Psi; \tau_{xzw} = G \frac{\partial \Psi_s}{\partial x}; \tau_{yzw} = G \frac{\partial \Psi_s}{\partial y} \quad (4.30)$$

The warping functions in Eqs. (4.29), (4.30) are written with respect to longitudinally variable shear center [9]. The subscript _{SV} is employed for Saint-Venant (uniform) torsion and _w for warping (non-uniform) torsion. The total shear stress due to torsion aggregates these two contributions:

$$\tau_{xzT} = \tau_{xzsV} + \tau_{xzw}, \quad \tau_{yzT} = \tau_{yzsV} + \tau_{yzw} \quad (4.31)$$

The torsional rotation θ is determined as the solution of the following linear differential equation with appropriate boundary conditions at the bar extremities:

$$GJ \frac{d\theta}{dz} - E \frac{d}{dz} \left(C_w \frac{d^2 \theta}{dz^2} \right) = T_{tot} \quad (4.32)$$

In (4.32) J is the torsion constant $J(z) = \int_{A(z)} x^2 + y^2 + x \frac{\partial \Psi}{\partial y} - y \frac{\partial \Psi}{\partial x} dA$ and C_w is the warping constant

$C_w(z) = \int_{A(z)} \Psi^2 dA$; Ψ is the warping function computed at elevation z . The contribution of the uniform and

non-uniform torsion to total sectional resistance is [9]:

$$T_{SV} = GJ \frac{d\theta}{dz}; \quad T_W = -E \frac{d}{dz} \left(C_w \frac{d^2\theta}{dz^2} \right); \quad T_{SV} + T_W = T_{tot} \quad (4.33)$$

This method [9] does not consider that the warping functions have a z variation and ignores the relationship between the normal of the surface and the normal of the curve for the boundary conditions. However, even with these approximations, the error between the shear stress distribution computed with this method and a full 3D FE model is reasonable as shown latter in section 3.

4.2.6 Computation of related quantities

The equilibrium equations at stress level are satisfied by the intrinsic formulation of the problems. The external equilibrium equations relating stresses and applied forces must also be satisfied. Moreover, even if the contribution of σ_x and σ_y to normal strain is neglected these normal stresses are not zero. The evaluation of these quantities is addressed in the following sections.

4.2.6.1 Stress resultants

For the axial force, biaxial moments, and torsion the equilibrium equations are already satisfied because normal stress σ_z and shear stresses τ_{xz} , τ_{yz} are obtained by using these equations; the remaining equations are those concerning τ_{xz} , τ_{yz} and V_x , V_y . The total shear stresses include the contribution of pure shear stress and torsion:

$$\tau_{xz} = \tau_{xzS} + \tau_{xzT}, \quad \tau_{yz} = \tau_{yzS} + \tau_{yzT} \quad (4.34)$$

To ensure equilibrium, the force resultants of τ_{xz} , τ_{yz} must be V_x and respectively V_y (for τ_{xzT} , τ_{yzT} the force resultants are zero due to the formulation). The main ideas of the proofs are given in the following equations and they are detailed in appendix A:

$$\int_{A(z)} \tau_{xz} dA \Big|_{z=0} = \int_A \tau_{xz} + x \underbrace{\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right)}_{=0(\text{equilibrium equation})} dA = \int_A \underbrace{\frac{\partial(x\sigma_z)}{\partial z}}_{H_1} + \underbrace{\frac{\partial(x\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(x\tau_{yz})}{\partial y}}_{H_2} dA = V_x \quad (4.35)$$

$$\int_{A(z)} \tau_{yz} dA \Big|_{z=0} = \int_A \tau_{yz} + y \underbrace{\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right)}_{=0(\text{equilibrium equation})} dA = \int_A \underbrace{\frac{\partial(y\sigma_z)}{\partial z}}_{H_3} + \underbrace{\frac{\partial(y\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(y\tau_{yz})}{\partial y}}_{H_4} dA = V_y \quad (4.36)$$

4.2.6.2 Determination of normal stresses σ_x and σ_y

The first two equilibrium equations (4.8) and boundary conditions (4.9) are coupled in a single differential equilibrium equation with one coupled boundary condition:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{summing, } \tau_{xy}=0} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = - \frac{\partial(\tau_{xz} + \tau_{yz})}{\partial z} \quad (4.37)$$

$$\begin{cases} \sigma_x l_s + \tau_{xy} m_s + \tau_{xz} n_s = 0 \\ \tau_{xy} l_s + \sigma_y m_s + \tau_{yz} n_s = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{summing, } \tau_{xy}=0} \sigma_x l + \sigma_y m = -(\tau_{xz} + \tau_{yz}) \cdot \tan(\alpha_n) \quad (4.38)$$

This sum is weighted with an appropriate function into the FE formulation. Let us assume that the normal stresses σ_x and σ_y represent the x and y derivatives of some function $\eta(x, y)$. By introducing σ_x and σ_y as η derivatives in (4.37) and (4.38) the strong form of the problem is found:

$$\begin{cases} -\nabla^2 \eta = \frac{\partial \tau_z}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ \frac{\partial \eta}{\partial n} = -(\tau_z \tan(\alpha_n)) \Big|_{z=0} \end{cases} \quad \text{with } \sigma_x = \frac{\partial \eta}{\partial x}; \sigma_y = \frac{\partial \eta}{\partial y}; \tau_z = \tau_{xz} + \tau_{yz} \quad (4.39)$$

To solve problem (4.39) the FE formulation presented in the next section can be employed. The derivation $\partial \tau_z / \partial z$ can be performed numerically (see also appendix B).

4.2.7 Finite element formulation

The evaluation of the stress distribution was transformed in the previous sections into a boundary value problem having the symbolical form:

$$\begin{cases} -\nabla^2 u = f(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h(x, y) \\ \int_A u dA = 0 \end{cases} \quad (4.40)$$

If the last condition in (4.40) is not added, the unknown function u can be determined only up to a constant because the boundary conditions are given only in terms of function derivatives. The constant does not influence the shear stresses because they use the derivatives of u . For a FE implementation the solution must be unique. To insure its uniqueness the additional condition $\int_A u dA = 0$ was added to the

formulation (4.40). Because function u corresponds physically to a warping function, the last condition in (4.40) can be interpreted as a condition for the longitudinal displacement of the bar w to fulfill compatibility and equilibrium equations [5, 6]. Three steps are involved in the application of this additional condition in the FE code: (i) assign a homogenous Dirichlet boundary condition to only a single arbitrary point B on the FE mesh [$u_0(x_B, y_B) = 0$]; (ii) solve the equation (4.40) and find u_0 ; (iii) compute

the final warping function: $u = u_0 - \frac{1}{A} \cdot \int_A u_0 dA$.

The implementation in FE of the typical strong form (4.40) starts with the determination of the weak form following the standard Ritz-Galerkin procedure described in three steps [42]:

- (i) Multiply differential equation (4.40) by a test function $w(x, y)$ and integrate over the domain:

$$\int_A w \cdot (-\nabla^2 u) dA = \int_A w \cdot f dA \quad (4.41)$$

- (ii) Integrate by parts the left term (use the divergence theorem and $-\nabla^2 u = -\nabla \cdot \nabla u$):

$$\int_A w \cdot (-\nabla \cdot \nabla u) dA = \int_A -w \nabla \cdot \nabla u dA = \int_A \nabla u \cdot \nabla w dA - \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (4.42)$$

- (iii) Impose the boundary conditions from (4.40) in (4.42):

$$\int_A \nabla u \cdot \nabla w dA - \int_{\Gamma} w \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_A \nabla u \cdot \nabla w dA - \int_{\Gamma} h \cdot w ds \quad (4.43)$$

Thus, the weak form (or the variational form) is:

$$\int_A \nabla u \cdot \nabla w dA = \int_A f \cdot w dA + \int_{\Gamma} h \cdot w ds \quad (4.44)$$

Suppose that the unknown field $u(x, y)$ is approximated over a finite element A_e with n nodes by: $u(x, y) = u_h(x, y) = \sum_{j=1}^n u_j \psi_j(x, y)$, and write the weak form (4.44) over this element:

$$\sum_{j=1}^n u_j \int_{A_e} \nabla \psi_j \cdot \nabla w dA = \int_{A_e} f \cdot w dA + \int_{\Gamma} h \cdot w ds \quad (4.45)$$

The system of linear equations at element level is obtained by successively replacing the test function $w(x, y)$ with the interpolation functions $\psi_i(x, y)_{i=1,n}$:

$$\mathbf{K}_e \cdot \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e + \mathbf{h}_e \text{ with } K_{i,j} = \int_{A_e} \nabla \psi_j \cdot \nabla \psi_i dA; f_i = \int_{A_e} f \cdot \psi_i dA; h_i = \int_{\Gamma} h \cdot \psi_i ds \quad (4.46)$$

and \mathbf{u}_e is the vector of nodal values u_j of the unknown function $u(x, y)$.

The solution is found by (a) assembling the elementary matrices (4.46) into the global linear system $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{h}$, (b) imposing the Dirichlet condition, and (c) solving the global system. The complete details of the implementation of a strong form into FE are given in Reddy [42].

4.3 The case of rectangular sections

For stress analysis of the variable section elements the rectangular section is probably the most studied

section. The element is subjected to $P-V_x-M_y$ forces which produce the displacement specific to the "wall" behavior (u , w displacements and θ_y rotation); the Poisson ratio is usually neglected. In the case of hydraulic structures, the columns with variable sections are subjected to full three-dimensional load combinations, $P-V_x-V_y-M_x-M_y-T$ (self-weight, hydrostatic pressure, ice impact, earthquake, uplift pressures, etc.). This paragraph covers the determination of the shear stresses due to the three-dimensional forces $P-V_x-V_y-M_x-M_y$ producing an arbitrary displacement patterns. The torsion formulation for variable section columns can be found in [9].

4.3.1 Section subjected to $P-V_x-M_y$

Suppose that a variable section column having rectangular cross-section is bounded to the u and d sides by two planes, Fig. 4.2(b1); the analyzed section $b_s \times h_s$ is located at elevation L_s . If only a shear force is applied in x direction ($V_x \neq 0$) it is logical to expect that all stresses are zero with two exceptions: the normal stress σ_z and the shear stress τ_{xz} , Fig. 4.2. Because σ_z has a linear variation in x (planar distribution) from the third equation of (4.8) it comes out, by integration, that τ_{xz} is a second degree polynomial (parabolic distribution, null Poisson ratio) [10, 15]:

$$\tau_{xz}(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c \quad (4.47)$$

This idea is generalized for the case when the column is subjected to $P-e_x-V_x-M_y$. The three constants in (4.47) need three conditions to be uniquely identified (all variables are evaluated at elevation L_s): (i)

$$\tau_{xz}(-h_s/2) = \sigma_z(-h_s/2) \cdot \tan(\alpha_u), \quad (ii) \quad \tau_{xz}(h_s/2) = -\sigma_z(h_s/2) \cdot \tan(\alpha_d), \quad \text{and} \quad (iii) \quad \int_A \tau_{xz} dA = V_x.$$

These conditions

represent the boundary conditions (4.22) and the external equilibrium equation (the force resultant of shear stresses is V_x). In the case when the Ω_u and Ω_d are not planes, the boundary conditions should be changed accordingly. Replacing the above mentioned conditions in (4.47) and solving:

$$a = -\frac{6 \cdot V_x}{b_s h_s^3} - \frac{3}{h_s^2} (\sigma_M \alpha_{d+u} + \sigma_P \alpha_{d-u}) \quad (4.48)$$

$$b = -\frac{1}{h_s} (\sigma_M \alpha_{d-u} + \sigma_P \alpha_{d+u}) \quad (4.49)$$

$$c = \frac{3}{2} \cdot \frac{V_x}{b_s h_s} + \frac{1}{4} (\sigma_M \alpha_{d+u} + \sigma_P \alpha_{d-u}) \quad (4.50)$$

where

$$\sigma_P = \frac{P}{b_s h_s}; \quad \sigma_M = -\frac{6 \cdot R M_y}{b_s h_s^2}; \quad \alpha_{d-u} = \tan(\alpha_d) - \tan(\alpha_u); \quad \alpha_{d+u} = \tan(\alpha_d) + \tan(\alpha_u) \quad (4.51)$$

The first terms in Eqs. (4.48), (4.50) represent the coefficients for shear distribution due to V_x , for constant

section elements (Jourawski formula); for this case $b = 0$. The advantage of this approach is that the finding of the shear stress distribution involves no differential equation. Equation (4.47) was validated using the examples presented in the next section as well as with similar models found in technical literature [15].

4.3.2 Consideration of three-dimensional loads

The general method (section 4.2) is employed to compute the shear stress distribution of a rectangular variable section column subjected to P - V_x - V_y - M_x - M_y . The z variation of the geometrical properties for the variable section column are, Fig. 4.2(b1):

$$h_s(z) = h_s - z(\tan(\alpha_u) + \tan(\alpha_d)); \quad h_u(z) = h_u + z \cdot \tan(\alpha_u); \quad h_d(z) = h_d - z \cdot \tan(\alpha_d) \quad (4.52)$$

$$x_g(z) = \frac{z(\tan(\alpha_u) - \tan(\alpha_d))}{2}; \quad x_{gP} = \frac{(L - L_s) \cdot (\tan(\alpha_u) - \tan(\alpha_d))}{2} \quad (4.53)$$

$$A(z) = b_s h_s(z); \quad I_x(z) = \frac{b_s^3 h_s(z)^3}{12}; \quad I_y(z) = \frac{b_s h_s(z)^3}{12} \quad (4.54)$$

When the Eqs. (4.52)-(4.54) are inserted in (4.15)-(4.19) and (4.22)-(4.25) the strong form of the problem is reached. The z derivatives of x_g , A , I_x , and I_y can be computed analytically but also numerically. Analytical relationships for the f_i functions, Eqs. (4.18) and (4.19), for rectangular sections have been developed by the authors for validation purposes.

4.4 Applications

This section has two main goals: (a) validation of the proposed formulation; (b) examination of its applicability when different parameters are varied: Poisson ratio, proportion between the section and column height (L/h_0 , Fig. 4.2), and cross-section shape. The first one is achieved by comparing the results produced by self-developed 2D FE software with those of the analysis performed with SAP 2000 [43] commercial 3D FE software and/or with analytical results when available; the 2D sectional analysis FE code is written in Matlab [44]. For the second one, the effect of Poisson ratio and geometrical proportion was examined using three columns: (i) rectangular cross-section, $L/h_0 = 8.3$ ($\nu = 0$, $\nu = 0.25$), (ii) rectangular section, $L/h_0 = 0.8$ ($\nu = 0.2$), (iii) spillway pier, $L/h_0 = 0.4$ ($\nu = 0$). The analyzed section was located for all cases at $L_s = L/4$, Fig. 4.2. The applied loads are: V_x , V_y and P - e_x - e_y ; at the section level they correspond to a three-dimensional loading state, P - V_x - V_y - M_x - M_y - T . The 2D FE software employs the quadratic triangular element (LST), 1 DOF/node (DOF = degree of freedom); the mesh is produced with the open-source three-dimensional grid generator Gmsh [45]. In SAP2000 the finite element is the standard solid element with 8 nodes (3 DOF/node) with incompatible modes activated. All three DOF are fully fixed at bottom end for all columns; at the other end all DOF are free. The loads were applied on the rectangular top section for examples 1, 2 and at elevation 8.535 m block B1 for example 3. The planar

distribution for normal stresses ($P-e_x-e_y$) Eq. (4.1) and the parabolic distribution for shear stresses (V_x, V_y) Eq. (4.47) were analytically integrated on each element of the mesh to obtain nodal forces. By analyzing the results near the boundary, it is clearly noticed that the 2D model performed a lot better than the 3D model for that region, as expected. The most representative stress distributions $\sigma_z, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ are discussed in the following paragraphs. The 3D plots in Figs. (4.4), (4.5) and (4.6) are produced with the 2D sectional analysis FE code.

Studies for the mesh density were conducted in order to check the influence of the mesh on the final results. The number of finite elements to mesh the analyzed section is not critical as long as: (a) a minimum of 10 FE is used on each edge of the section; (b) the shorter edge is divided in at least 2 segments (when there is an important difference between the longer and the shorter edge); (c) quadratic triangle are used; and (d) the equilibrium and the boundary conditions is "numerically" satisfied when are checked after the analysis. Frontal meshing algorithm is preferred for having high quality elements [45].

4.4.1 Rectangular section pier with a single sloped boundary

The first example addresses the "classical" example of a rectangular cross-section with one sloped boundary (d side), Fig. 4.4. For this case, the hypothesis that the normal stress distribution σ_z is linear is fully satisfied (also, expected because of large $L/h_0 = 8.3$ ratio). The cross-section mesh has 25 (13) equally distributed nodes in the x (y) direction, regardless the elevation; along the pier height 201 nodes are equally distributed to keep the ratio of the FE sides close to 1. The 3D model has 195 975 DOF while the 2D sectional analysis model has only 7 811 DOF. Nevertheless, by comparing the stress variation in Figs. 4.4(b)-(d) there is no noticeable difference between the results provided by the 3D vs. 2D sectional analysis model for all load conditions: biaxial shear V_x, V_y or eccentric axial force P (the maximum difference is less than 1%). As mentioned earlier, near the boundary the results found by the 2D model are closer than those of the 3D model to the analytical (from equilibrium) value $-\sigma_z \cdot \tan(\alpha_n)$, Eq. (4.22).

4.4.2 Influence of Poisson ratio

The previous example was repeated with a value of Poisson ratio ν non-null, $\nu = 0.25$. For this case, also, there is practically no difference between the results of the 2D and 3D models. Conceptually, the example with $\nu = 0$ corresponds to the solution where only the equilibrium equations were integrated; this is the common solution found in literature. The compatibility requirements *and* equilibrium equations are necessary to formulate the problem when $\nu \neq 0$. The effect of ν on the shear stresses is globally small but locally the difference can be up to 50% if compared with the case $\nu = 0$, Fig. 4.4(d4). Thus, in general the Poisson ratio effect cannot be neglected especially when the local contribution of the shear stresses (τ_{xz} and τ_{yz}) is a concern.

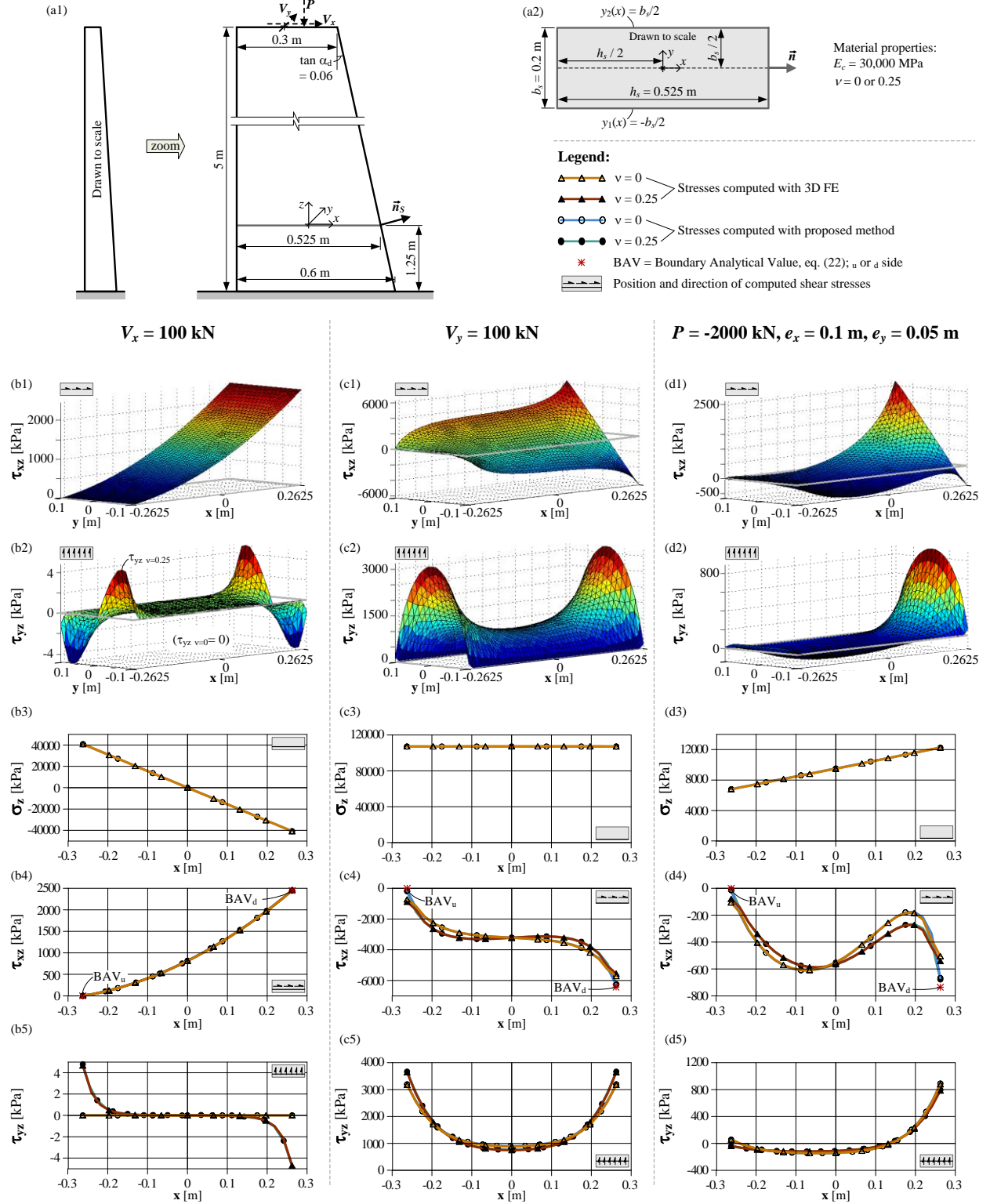


Fig. 4.4 Rectangular section pier with a single sloped boundary: (a) geometry and notations, and structural response for applied forces (b) $V_x = 100$ kN, (c) $V_y = 100$ kN, and (d) $P = -2000$ kN, $e_x = 0.1$ m, $e_y = 0.05$ m.

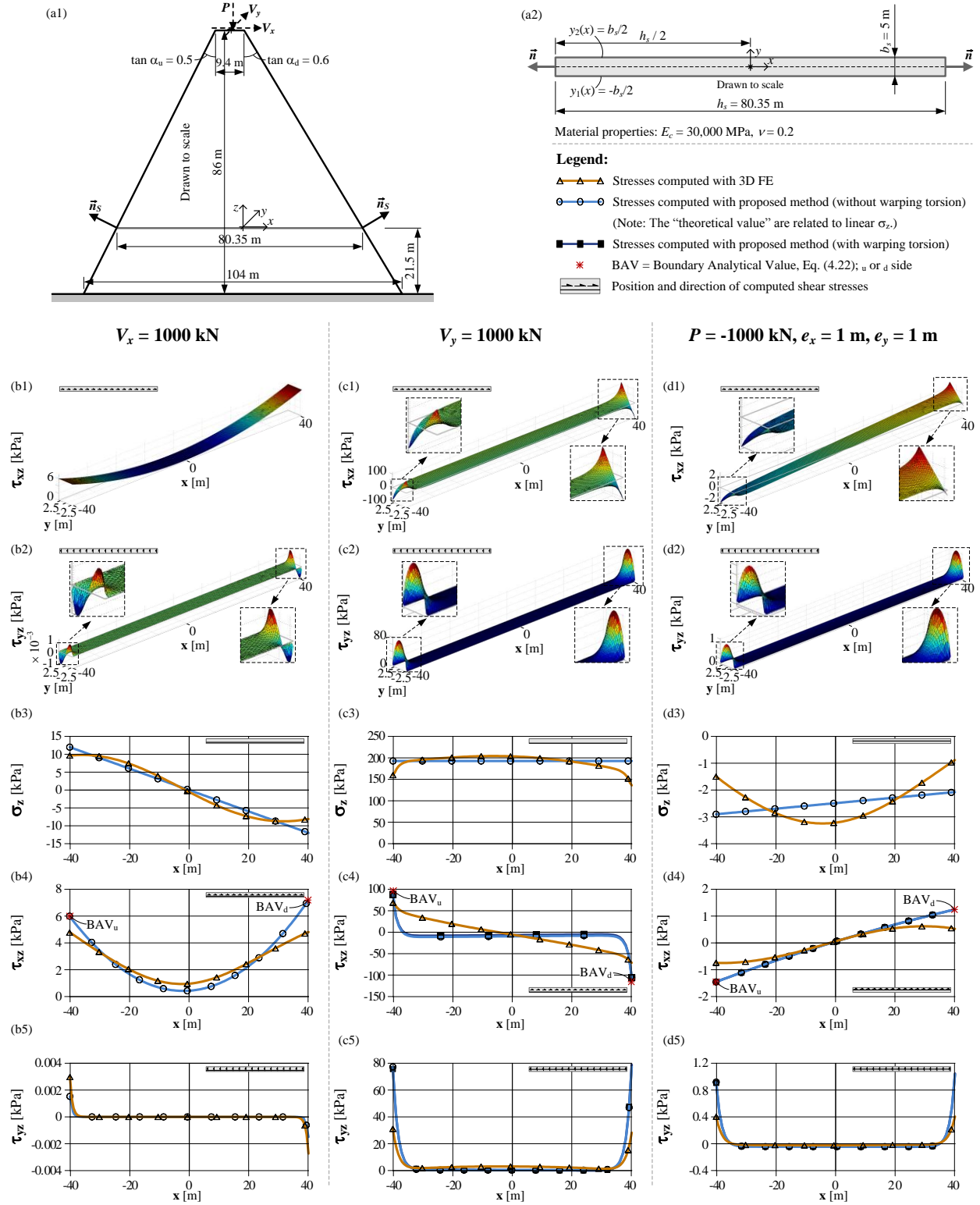


Fig. 4.5 Concrete buttress (unsymmetrical boundary conditions): (a) geometry and notations, and structural response for applied forces (b) $V_x = 1000$ kN, (c) $V_y = 1000$ kN, and (d) $P = -1000$ kN, $e_x = 1$ m, $e_y = 1$ m.

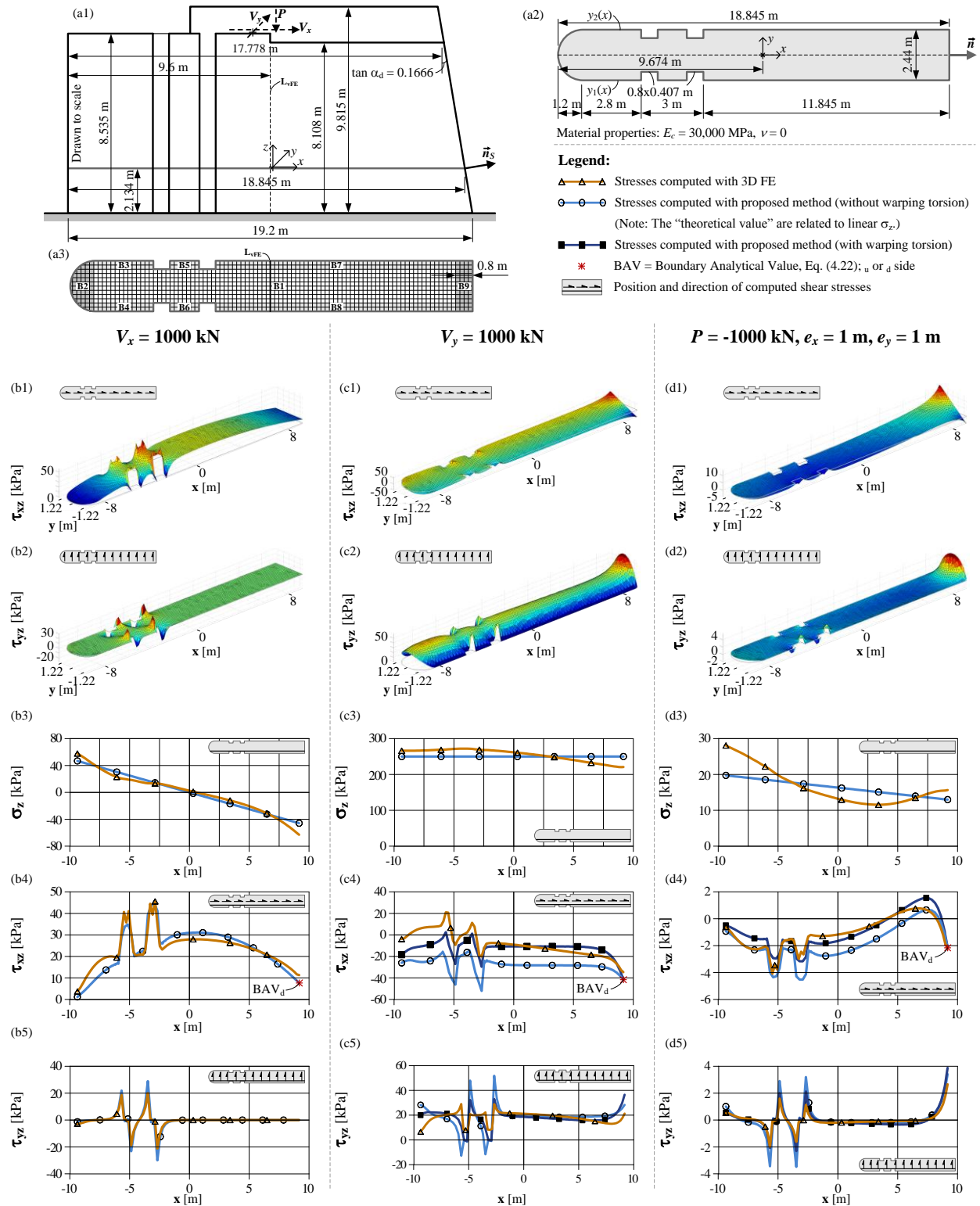


Fig. 4.6 Pier (squat wall) for hydraulic structures: (a) geometry and notations, and structural response for applied forces (b) $V_x = 1000 \text{ kN}$, (c) $V_y = 1000 \text{ kN}$, and (d) $P = -1000 \text{ kN}$, $e_x = 1 \text{ m}$, $e_y = 1 \text{ m}$.

4.4.3 Rectangular section buttress with unsymmetrical slopes

The second example is adapted from a real concrete buttress dam in Morocco (Tamzaourt, dam height 86 m), Fig. 4.5. Both sides are sloped with a tangent of 0.5 (u side) respectively 0.6 (d side); $\nu = 0.2$. Because the ratio L/h_0 is small ($0.8 \Rightarrow$ the column height is smaller than the section height) it is expected that the distribution of normal stress σ_z is non-linear [e.g. Fig. 4.5(d3)]. Note that for the analysis of hydraulic structures the assumption of linear variation for normal stress σ_z is generally accepted. The cross-section mesh has 131 (11) equally distributed nodes in the x (y) direction, regardless the elevation; along the pier height 101 nodes are equally distributed to keep the ratio of the FE sides close to 1. The 3D model has 436 623 DOF while the 2D sectional analysis model has only 8 043 DOF (this large number of DOF for the 3D model is necessary because of the high ratio between the section height and depth: 104×5 m). The differences between the shear stresses τ_{xz} computed with the 3D and 2D models are more pronounced, mainly because of the nonlinearity of σ_z . These differences can be acceptable in practice as the maximum shear stress magnitude is obtained by both models. The differences between the two models are small for τ_{yz} . The stress distributions with/without warping torsion are practically identical (the buttress slopes are close to one another). The section behaves more like a thin-walled section concentrating the warping function variation near the ends.

4.4.4 Pier (squat wall) for hydraulic structures

The last example (Fig. 4.6) demonstrates the capability of the proposed formulation to evaluate the shear distribution in more difficult conditions: (a) three-dimensional loads, (b) very small ratio L/h_0 (0.4) generating an important effect of the restraints of the pier base, and (c) non-linear normal stress σ_z . The column is a real spillway pier from an existing hydroelectric facility in Québec, Canada. The analyzed section, a typical spillway section with one axis of symmetry, has the bounding box of $18.85 \text{ m} \times 2.44 \text{ m}$; the downstream is sloped with a tangent of 0.17; $\nu = 0$, Fig. 4.6(a). The mesh for the base cross-section is detailed in Fig. 4.6(a3). It is divided on 9 blocks on each block the nodes being equally distributed. The mesh has 13 nodes in the y direction and 47 equally distributed nodes along the pier height to keep the ratio of the FE sides close to 1. The number of nodes in the x direction for each block is: 87 (B1), 4-7 (B2), 15 (B3, B4), 8 (B5, B6), 58 (B7, B8), and 5 (B9) for a total of 1217 nodes for a typical cross-section. Along the pier height the nodes situated on the left of the line L_{vFE} , Fig. 4.6(a3), keep the same x and y position while those located on the right of this line move to the left linearly with respect to the slope change. On the upper part of the pier, where the section is reduced, the nodes that fall outside of the reduced section are simply discarded from the mesh. The 3D model has 141 456 DOF while the 2D sectional analysis model has only 13 788 DOF. The variation for the torsional constants, the shear center, the twist angle as well as the resistant and applied torsion for the load case $V_y = 1000 \text{ kN}$ are depicted in

Fig. 4.7. For τ_{yz} the differences between the 2D and 3D models are negligible. The shear stress τ_{xz} computed with the 2D model captures the variation pattern of the 3D model with acceptable difference. For this case the use of the warping torsion in the formulation improves significantly the shear distribution. The proposed method is therefore suitable even for structural elements having large shear deformations like the case of squat walls.

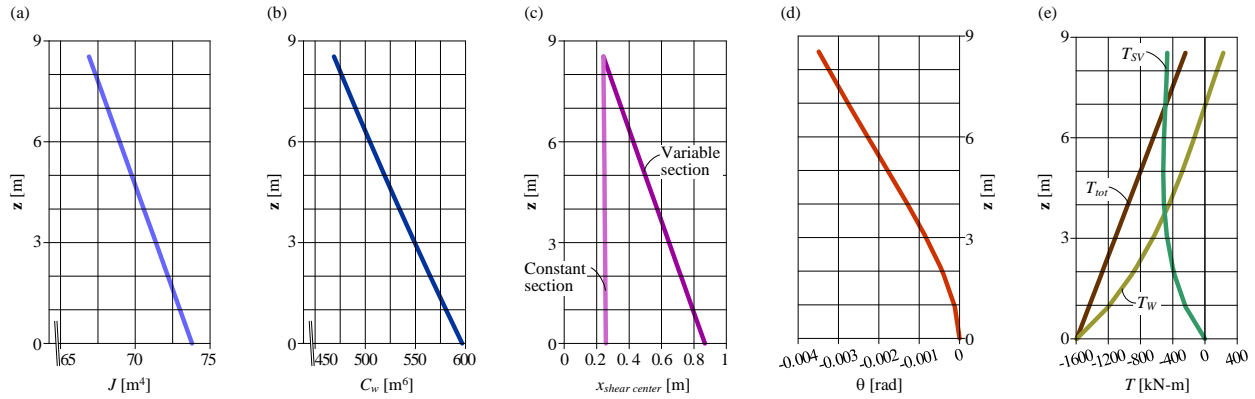


Fig. 4.7 Along the height variation for torsion analysis variables: (a) torsion constant J , (b) warping constant C_w , (c) shear center, (d) twist angle, and (e) resistant (T_{sv} , T_w) and applied torsion (T_{tot}) for load case $V_y = 1000$ kN of example 3.

4.5 Summary and conclusions

This paper presents a mathematical and finite element formulations for elastic sectional analysis of variable section elements subjected to three-dimensional loads (axial force, biaxial shear force, bending moment, and torsion) producing arbitrary deformations ("wall" and "plate" behaviors). The element has arbitrary unidirectional longitudinal variability and arbitrary uniaxial symmetrical cross section. Regular as well as thin-walled sections can be analyzed. The formulation consists in the determination of the normal and shear stress distributions by solving two boundary value problems with appropriate boundary conditions: one for shear without torsion and the other one for pure torsion. The formulation is based on the equilibrium and compatibility equations following a linear material law with the inclusion of Poisson ratio. The proposed method was validated using three examples ranging from a regular column to a squat wall. The main conclusions are:

- (a) The analysis of a variable section element can be accomplished by doing a *2D sectional analysis* for an equivalent constant section element by extending the differential formulation of Euler-Bernoulli beam theory including warping. This shows practical significance of major interest for the analysis of hydraulic structures because their safety assessment can be first efficiently

evaluated with series of sectional analyses. Hence, the proposed method can be used as a powerful tool to estimate more sophisticated 3D models response.

- (b) The mathematical formulation is *analytical* giving the same level of accuracy as the one of the input normal stress: when the normal stress is exact, the shear stresses are exact to; when it includes an approximation the shear stresses include it to. Thus, for the elements where the assumption of linear distribution for normal flexural stress is satisfied the proposed sectional approach computes results within 1% of 3D finite element (FE). If this assumption is not mathematically fulfilled (bulk and squat walls) the approximation in normal stress is propagated in the shear stresses computation. However, even for this case the stress distributions are very similar to 3D FE while the stress intensity shows certain variations. The assumption of linear normal stress is typically used for the analysis of hydraulic structures being aware that for some structures it is only an estimation of the stress field.
- (c) The 2D sectional analysis is a viable *alternative* to the full 3D FE analysis even facing deep sections such as the case of squat-walls subjected to bending, shear, and non-uniform torsion. Considerable reduction in computational effort is noticed because the analysis employs surface 2D mesh instead of much more elaborate volumetric 3D mesh.
- (d) Analyzing in detail the proposed formulation, one can extrapolate that the framework of the proposed method is *general* enough to handle various extensions: arbitrary section/spatial variation, non-linear normal stress variation, boundary element formulation, ...
- (e) The proposed method adds *no further complications* if compared with the analysis of constant section elements. It offers the advantage of generality and accessibility allowing a direct implementation in existing finite element code for sectional analysis of constant section elements subjected to arbitrary three dimensional load combinations.

Currently our research directions are oriented to the extension of the present method to non-linear material for cracked variable section elements.

4.6 Acknowledgements

The financial support provided by the Quebec Fund for Research on Nature and Technology, and the Natural Science and Engineering Research Council of Canada is acknowledged.

4.7 References

- [1] C.G. Chiorean, Computerised interaction diagrams and moment capacity contours for composite steel-concrete cross-sections, Eng. Struct. 32 (11) (2010) 3734-3757.

- [2] A.E. Charalampakis, V.K. Koumoussis, Ultimate strength analysis of composite sections under biaxial bending and axial load, *Adv. Eng. Software* 39 (11) (2008) 923-936.
- [3] T. Brondum-Nielsen, Serviceability analysis of concrete sections under biaxial bending, *J. Struct. Eng.* 123 (1) (1997) 117-119.
- [4] E.J. Sapountzakis, V.G. Mokos, A BEM solution to transverse shear loading of beams, *Comput. Mech.* 36 (5) (2005) 384-397.
- [5] F. Gruttmann, R. Sauer, W. Wagner, Shear stresses in prismatic beams with arbitrary cross-sections, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 45 (7) (1999) 865-889.
- [6] G.R. Cowper, The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *ASME J. Appl. Mech.* 33 (1966) 335-340.
- [7] W.E. Mason, L.R. Herrmann, Elastic shear analysis of general prismatic beams, *ASCE J. Eng. Mech.* 94 (EM4) (1968) 965-983.
- [8] L.R. Herrmann, Elastic torsional analysis of irregular shapes, *ASCE J. Eng. Mech.* 91 (EM6) (1965) 11-19.
- [9] E.J. Sapountzakis, V.G. Mokos, Nonuniform torsion of bars of variable cross section, *Comput. Struct.* 82 (9-10) (2004) 703-715.
- [10] L. Vu-Quoc, P. Leger, Efficient evaluation of the flexibility of tapered I-beams accounting for shear deformations, *Int. J. Numer. Methods Eng.* 33 (3) (1992) 553-566.
- [11] S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, *Theory of elasticity*, 3rd Ed., McGraw-Hill, Toronto, 1970.
- [12] Z. Friedman, J.B. Kosmatka, Torsion and flexure of a prismatic isotropic beam using the boundary element method, *Comput. Struct.* 74 (4) (2000) 479-494.
- [13] S.P. Timoshenko, Chapter III.10: Shear stresses in beams of variable cross section, in: *Strength of materials - Part II: Advanced theory and problems*, D. Van Nostrand, Princeton, N.J., 1956, pp. 62-65.
- [14] R. L'Hermite, Chapter III.16: Beams with variable section. Self-weight effect., in: *Strength of materials, theoretical and experimental (Tome 1)*, Dunod, Paris, 1954, pp. 172-177, in French.

- [15] J.T. Oden, E.A. Ripperger, Chapter 5.4: Stresses in beams of variable depth, in: *Mechanics of elastic structures*, 2nd Ed., McGraw-Hill, Hemisphere Publishing Corp., USA, 1981, pp. 112-119.
- [16] G. Davies, R.S. Lamb, C. Snell, Stress distribution in beams of varying depth, *Struct. Engnr.* 51 (11) (1973) 421-435.
- [17] United States Bureau of Reclamation (USBR), Chapter IV: Layout and analysis, in: *Design of gravity dams*, 3rd Ed., Denver, 1976, pp. 35-43.
- [18] J.A. Alvarez-Dios, L.J. Alvarez-Vazquez, J.M. Viano, New models for bending and torsion of variable cross section rods, *Z. Angew. Math. Mech.* 79 (12) (1999) 835-853.
- [19] A.E. Armenakas, Chapter 10: Non-prismatic members - Stress concentrations, in: *Advanced mechanics of materials and applied elasticity*, CRC Press, Taylor & Francis Group, Boca Raton, FL, 2006, pp. 499-511.
- [20] S.T. Chang, Shearing stress due to prestress in variable depth beam, *ASCE J. Struct. Div.* 108 (ST7) (1982) 1648-1653.
- [21] K.P. Chong, W.D. Swanson, R.B. Matlock, Shear analysis of tapered beams, *ASCE J. Struct. Div.* 102 (ST9) (1976) 1781-1788.
- [22] J.Y. Liu, Shear strength of tapered wood beams, *ASCE J. Struct. Div.* 107 (ST5) (1981) 719-731.
- [23] B.A. Boley, On the accuracy of the Bernoulli-Euler theory for beams of variable section, *ASME J. Appl. Mech.* 30 (1963) 373-378.
- [24] F.N. Gimena, P. Gonzaga, L. Gimena, 3D-curved beam element with varying cross-sectional area under generalized loads, *Eng. Struct.* 30 (2) (2008) 404-411.
- [25] E.J. Sapountzakis, V.G. Mokos, 3-D Beam element of variable composite cross section including warping effect, *Acta Mech.* 171 (3-4) (2004) 151-169.
- [26] C. Balkaya, Behavior and modeling of nonprismatic members having T-sections, *ASCE J. Struct. Eng.* 127 (8) (2001) 940-946.

- [27] P. Gupta, S.T. Wang, G.E. Blandford, Lateral-torsion buckling of nonprismatic I-beams, *ASCE J. Struct. Eng.* 122 (7) (1996) 748-755.
- [28] A. Tena-Colunga, Stiffness formulation for nonprismatic beam elements, *ASCE J. Struct. Eng.* 122 (12) (1996) 1484-1489.
- [29] E.J. Sapountzakis, D.G. Panagos, Shear deformation effect in non-linear analysis of composite beams of variable cross section, *Int. J. Non Linear Mech.* 43 (7) (2008) 660-682.
- [30] S. Maalek, Shear deflections of tapered Timoshenko beams, *Int. J. Mech. Sci.* 46 (5) (2004) 783-805.
- [31] G. Baker, Exact deflections in nonprismatic members, *Comput. Struct.* 61 (3) (1996) 515-528.
- [32] S.J. Medwadowski, Nonprismatic shear beams, *ASCE J. Struct. Eng.* 110 (5) (1984) 1067-1082.
- [33] F. Gruttmann, W. Wagner, Shear correction factors in Timoshenko's beam theory for arbitrary shaped cross-sections, *Comput. Mech.* 27 (3) (2001) 199-207.
- [34] M. Schulz, F.C. Filippou, Generalized warping torsion formulation, *ASCE J. Eng. Mech.* 124 (3) (1998) 339-347.
- [35] J.W. Wekezer, Elastic torsion of thin walled bars of variable cross section, *Comput. Struct.* 19 (3) (1984) 401-407.
- [36] J. Wackerfuß, F. Gruttmann, A nonlinear Hu–Washizu variational formulation and related finite-element implementation for spatial beams with arbitrary moderate thick cross-sections, *Comput. Method. Appl. M.* (2011), doi: 10.1016/j.cma.2011.01.006.
- [37] C.J. Burgoyne, E.H. Brown, Nonuniform elastic torsion, *Int. J. Mech. Sci.* 36 (1) (1994) 23-38.
- [38] A. Campanile, M. Mandarino, V. Piscopo, A. Pranzitelli, On the exact solution of non-uniform torsion for beams with asymmetric cross-section, *Eng. Technol.* 55 (2009) 46-53.
- [39] H.R. Ronagh, M.A. Bradford, M.M. Attard, Nonlinear analysis of thin-walled members of variable cross-section, *Comput. Struct.* 77 (3) (2000) 285-299.

- [40] P. Dawkins, Gradient vector, tangent planes and normal lines, in: Calculus III, <<http://tutorial.math.lamar.edu/downloadfile.aspx?file=B,11,N>>, April, 2011, pp. 111-112.
- [41] L. Stefan, Constitutive hydromechanical three-dimensional model for stability analysis of spillway piers, PhD Thesis, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada, 2011, in French.
- [42] J.N. Reddy, An introduction to the finite element method, 3rd Ed., McGraw-Hill, USA, 2006.
- [43] Computers and Structures, Inc., CSI Analysis reference manual for SAP2000®, <<http://www.csiberkeley.com>>, Berkeley, CA, USA, 2009.
- [44] The MathWorks, Inc., Matlab ® 7 - Programming Tips, <<http://www.mathworks.com>>, Natick, MA, USA, 2010.
- [45] C. Geuzaine, J.-F. Remacle, Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities, Int. J. Numer. Meth. Engng. 79 (11) (2009) 1309-1331.

4.8 Appendices

The appendix A presents the detailed proof for the shear stress resultants [Eqs. (4.35), (4.36)] using two integral properties detailed in appendix B.

4.8.1 Appendix A

$$\begin{aligned}
 H_1 &= \int_A \frac{\partial(x\sigma_z)}{\partial z} dA = -EI_y \frac{d\sigma_{1z}}{dz} \stackrel{\text{use (4.A.7)}}{=} V_x - \frac{P}{A} \cdot \frac{d}{dz} \left(\int_A x dA \right) + \frac{RM_y}{I_y} \cdot \frac{d}{dz} \left(\int_A x^2 dA \right) = \dots \\
 &\dots \stackrel{\text{use (4.B.1)}}{=} V_x + \frac{P}{A} \cdot \int_{\Gamma} x \cdot \tan(\alpha_n) ds - \frac{RM_y}{I_y} \cdot \int_{\Gamma} x^2 \cdot \tan(\alpha_n) ds
 \end{aligned} \tag{4.A.1}$$

$$\begin{aligned}
 H_2 &= \int_A \frac{\partial(x\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(x\tau_{yz})}{\partial y} dA \stackrel{\text{Green's theorem}}{=} \int_{\Gamma} x(\tau_{xz}l + \tau_{yz}m) ds = \int_{\Gamma} x \cdot -\sigma_z \cdot \tan(\alpha_n) ds = \dots \\
 &\dots = -\frac{P}{A} \cdot \int_{\Gamma} x \cdot \tan(\alpha_n) ds + \frac{RM_y}{I_y} \cdot \int_{\Gamma} x^2 \cdot \tan(\alpha_n) ds + \underbrace{\frac{RM_x}{I_x} \cdot \int_{\Gamma} xy \cdot \tan(\alpha_n) ds}_{0(\text{symmetry})}
 \end{aligned} \tag{4.A.2}$$

$$\Rightarrow H_1 + H_2 = V_x \tag{4.A.3}$$

$$H_3 = \int_A \frac{\partial(y\sigma_z)}{\partial z} dA = -EI_x \frac{d\sigma_{2z}}{dz} = V_y + \frac{RM_x}{I_x} \cdot \frac{d}{dz} \left(\int_A y^2 dA \right) = \dots$$

$$\dots \xrightarrow{\text{use (4.B.2)}} V_y - \frac{RM_x}{I_x} \cdot \int_{\Gamma} y^2 \cdot \tan(\alpha_n) ds \quad (4.A.4)$$

$$H_4 = \int_A \frac{\partial(y\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(y\tau_{yz})}{\partial y} dA \xrightarrow{\text{Green's theorem}} \int_{\Gamma} y(\tau_{xz}l + \tau_{yz}m) ds = \int_{\Gamma} y \cdot -\sigma_z \cdot \tan(\alpha_n) ds = \dots$$

$$\dots = -\frac{P}{A} \cdot \underbrace{\int_{\Gamma} y \cdot \tan(\alpha_n) ds}_{0(\text{symmetry})} + \frac{RM_y}{I_y} \cdot \underbrace{\int_{\Gamma} xy \cdot \tan(\alpha_n) ds}_{0(\text{symmetry})} + \frac{RM_x}{I_x} \cdot \int_{\Gamma} y^2 \cdot \tan(\alpha_n) ds \quad (4.A.5)$$

$$\Rightarrow H_3 + H_4 = V_y \quad (4.A.6)$$

$$x_g = \frac{\int_A x dA}{A} \Rightarrow \frac{dx_g}{dz} \Big|_{z=0} = \frac{1}{A} \cdot \frac{d}{dz} \left(\int_A x dA \right) - \frac{1}{A^2} \cdot \underbrace{\int_A x dA}_{0} \cdot \frac{dA}{dz} = \frac{1}{A} \cdot \frac{d}{dz} \left(\int_A x dA \right) \quad (4.A.7)$$

4.8.2 Appendix B

$$\frac{d}{dz} \left(\int_A f(x) dA \right) = \frac{d}{dz} \int_{h_u(z)}^{h_d(z)} f(x) \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy dx = \frac{d}{dz} \int_{h_u(z)}^{h_d(z)} f(x) \cdot l(x) dx \xrightarrow{\text{Leibniz's rule}} \dots$$

$$\dots \underbrace{\int_{h_u(z)}^{h_d(z)} \frac{\partial}{\partial z} (f(x)l(x)) dx}_{0(\text{not a z function})} + \underbrace{f(h_d)}_{f_d} \underbrace{l_d}_{\frac{dh_d}{dz}} - \underbrace{f(h_u)}_{f_u} \underbrace{l_u}_{\frac{dh_u}{dz}} = -(f_d l_d \tan(\alpha_d) + f_u l_u \tan(\alpha_u)) = \dots$$

$$\dots = - \left(\underbrace{\int_{\Gamma_d} f(x) \tan(\alpha_n) ds}_{\text{constant on } \Gamma_d} + \underbrace{\int_{\Gamma_u} f(x) \tan(\alpha_n) ds}_{\text{constant on } \Gamma_u} + \underbrace{\int_{\Gamma-\Gamma_d-\Gamma_u} f(x) \tan(\alpha_n) ds}_{0(\tan(\alpha_n)=0)} \right) = - \int_{\Gamma} f(x) \tan(\alpha_n) ds \quad (4.B.1)$$

$$\frac{d}{dz} \left(\int_A f(y) dA \right) = \frac{d}{dz} \int_{h_u(z)}^{h_d(z)} \underbrace{\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(y) dy}_{F(x)} dx = \frac{d}{dz} \int_{h_u(z)}^{h_d(z)} F(x) dx \xrightarrow{\text{Leibniz's rule}} \dots$$

$$\dots \underbrace{\int_{h_u(z)}^{h_d(z)} \frac{\partial F(x)}{\partial z} dx}_{0} + F(h_d) \underbrace{\frac{dh_d}{dz}}_{-\tan(\alpha_d)} - F(h_u) \underbrace{\frac{dh_u}{dz}}_{\tan(\alpha_u)} = - \left(\int_{y_{1d}}^{y_{2d}} f(y) \tan(\alpha_d) dy + \int_{y_{1u}}^{y_{2u}} f(y) \tan(\alpha_u) dy \right) = \dots$$

$$\dots = - \left(\underbrace{\int_{\Gamma_d} f(y) \tan(\alpha_n) ds}_{\Gamma_d = \text{line}(y_{1d}, y_{2d})} + \underbrace{\int_{\Gamma_u} f(y) \tan(\alpha_n) ds}_{\Gamma_u = \text{line}(y_{1u}, y_{2u})} + \underbrace{\int_{\Gamma-\Gamma_d-\Gamma_u} f(y) \tan(\alpha_n) ds}_{0(\tan(\alpha_n)=0)} \right) = - \int_{\Gamma} f(y) \tan(\alpha_n) ds \quad (4.B.2)$$

4.9 List of key symbols

b_s, h_s = sizes for rectangular analyzed section.

E, G, ν = material properties: Young modulus, shear modulus, and Poisson ratio.

$f_{1P}, f_{2P}, f_{1x}, f_{1y}, f_{2x}, f_{2y}, h_v, h_{nx}, h_{ny}$ = right hand functions for strong form of pure shear formulation.

J, C_w = torsion and warping constants.

L, L_s = column height and position of the reference section.

L_n = length of the in-plane outward normal of curve Γ, \vec{n} .

L_{ns} = length of the outward 3D normal of surface Ω, \vec{n}_s .

$l, m, n = x, y,$ and z components of the in-plane outward normal of curve Γ, \vec{n} .

$l_s, m_s, n_s = x, y,$ and z components of the outward 3D normal of surface Ω, \vec{n}_s .

$P, e_x, e_y, M_x, M_y, V_x, V_y, T$ = direct applied loads: axial force with two eccentricities, biaxial moments, biaxial shear forces, torsion moment.

$-RM_x, RM_y$ = total resultant bending moments in the x and y direction (sum of contribution of direct applied moments, eccentrically axial force and biaxial shear forces); note that mathematically, RM_x is the algebraic opposite of the bending moment in x direction.

T_B = torsion due to the difference between the centroid and shear center of analyzed section accounting for 3D variation of element boundary.

T_{tot} = total torsion for analysis; sum of direct torsion, torsion due to the difference between the centroid of top and analyzed section, torsion due to the difference between the centroid and shear center of analyzed section.

u, v, w = displacements in the $x, y,$ and z direction.

x_{Dv}, y_{Dv} = coordinates of variable shear center (when shear forces are not null).

x_g, A, I_x, I_y, x_{gp} = geometrical properties of the analyzed section: centroid, area, x and y moments of inertia, and the centroid coordinate of the section where P is applied (top section).

α_u, α_d = angle between the outward 3D normal of surface Ω_u, Ω_d and the horizontal.

$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$ = normal strain in the $x, y,$ and z direction and respectively shearing strain in the $xy,$

xz , and yz planes.

η = 2D warping function for computation of normal stresses in the x and y direction.

θ = twist angle.

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sigma_w$ = normal stresses in the x, y , and z direction; the additional subscript w stands for "warping".

$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ = shear stresses in the xy, xz , and yz planes; the additional subscripts s, sv, w, t stand for "shear", "Saint-Venant", "warping" and "total".

ψ, ψ_G = 2D warping functions for pure shear formulation ($\psi_G = \psi \cdot G$).

Γ = closed curve bounding the reference/analyzed section; the additional subscripts $_u$ or $_d$ stands for upstream and downstream.

Ω = outward surface boundary of the pier having the equation $F_1(x, y) + F_2(z)$ with F_1 and F_2 being arbitrary functions; the additional subscripts $_u$ or $_d$ stands for upstream and downstream.

Ψ, Ψ_s = 2D warping functions for pure torsion formulation: primary and secondary warping function.

CHAPITRE 5 :

ARTICLE 3 : THREE-DIMENSIONAL HYDROMECHANICAL SECTIONAL ANALYSIS OF CRACKED NON PRISMATIC CONCRETE SPILLWAY PIERS

Auteurs : Lucian Stefan et Pierre Léger

Article soumis dans la revue Journal of Engineering Mechanics - ASCE (soumis le 15 juillet 2011).

5.1 Introduction

Concrete dams and appurtenant spillways are strategic infrastructure to generate electricity and control floods. Figs. 5.1(a)-(b) indicate that spillway piers are three-dimensional (3D) structures subjected to 3D loads leading to six external actions: axial P , moments M_x , M_y (PMM), shears V_x , V_y and torsion T (VVT). Complex 3D load combinations applied to these massive structures include: mechanical, hydrostatic/hydrodynamic and thermal loads, Fig. 5.1(b). Hydraulic structures are subjected to mandatory periodic structural safety assessment by regulatory agencies. For that purpose, several guidelines specify required values for performance indicators such as the sliding safety factors (SSF) within the context of the 2D "gravity method" for failure modes in the upstream-downstream (u/s) direction (CDA 2007, FERC 2002, USACE 1995, USBR 1987). In the gravity method, the load resultants acting on several failure planes, usually located at lift joints [Fig. 5.1(b)] along the height of the structure, are first evaluated using rigid body equilibrium. Normal stresses are computed from beam theory (P - M_y) assuming a *linear* distribution. Crack initiation and propagation are computed by iterations while updating the uplift pressures (UP) as water penetrates in crack. This leads to a coupled hydromechanical problem. The gravity method is used prior to the application of the finite element (FE) method [Fig. 5.1(c)], if need be. FE analysis is quite difficult to apply and interpret in the context of 3D concrete cracking including hydromechanical interactions. Most often dedicated spreadsheet or computer programs such as CADAM (Leclerc et al. 2003) are used to apply the 2D gravity method. Some dam safety guidelines (BMNI 2002) recommends 3D linear normal stress distribution for stability assessment of 3D structures without providing tools to solve the related hydromechanical problem. A 3D extension of the gravity method to solve, in a robust fashion, the P - M_x - M_y problem has been developed by Stefan and Léger (2008). The SSF is then computed by applying the Mohr-Coulomb failure criterion using force resultants V_x , V_y acting on the remaining uncracked section while ignoring torsion T .

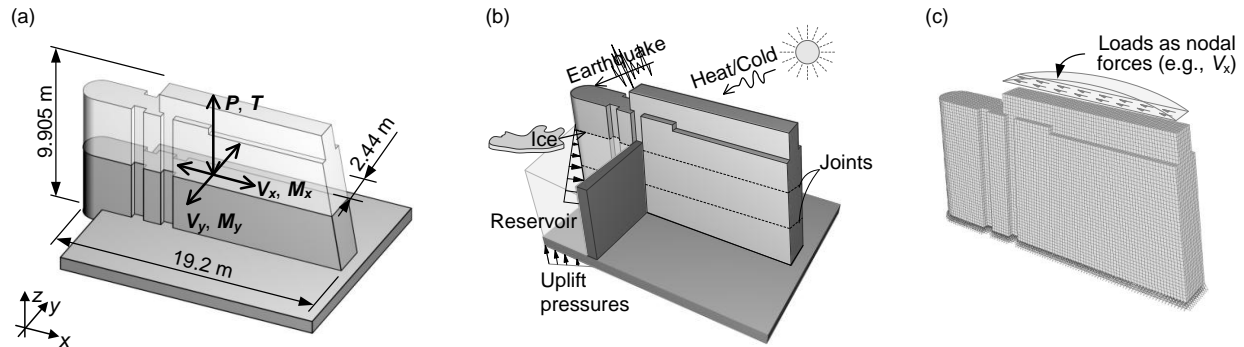


Fig. 5.1 Models for stability analysis of concrete spillway piers: (a) typical "gravity method"; (b) dedicated software (CADAM-3D); and (c) general finite element program, model with 57191 nodes (SAP 2000 ®)

The cracking analysis, especially for reinforced sections, is widely addressed in the literature, ranging from exhaustive algorithms to sophisticated adaptive nonlinear strategies (Furlong et al. 2004). Most of them are not appropriate to hydraulic structures as they ignore uplift pressures (Stefan and Léger 2008). Shear analysis of beams is discussed usually as a part of matrix analysis of arbitrary, composite or variable sections with the well-known concept of Timoshenko coefficient (Brnic et al. 2010, Sapountzakis and Mokos 2007). Sectional shear stress analysis was formulated for arbitrary cross-sections of slender columns based on displacement-field technique (Gruttmann 1999, Mason and Herrmann 1968). The formulation was extended to variable section elements but it is limited to symmetrically tapered beams subjected to unidirectional loads (Pugsley and Weatherhead 1942, Russo and Garic 1992). An interesting asymptotic derivation for sectional analysis of arbitrary geometry elements subjected to 3D loads was also proposed but this method is confined to elements approaching infinite length (Rodriguez and Viano 1997). The research for solving the torsion problem follows three directions: (a) computation of angle of twist (Eisenberger 1995, Bazant 1965); (b) Saint-Venant or uniform torsion (Timoshenko and Goodier 1970, Kollbrunner and Basler 1969); and (c) non-uniform or constrained torsion (Sapountzakis and Mokos 2004, Reagan and Pilkey 2002). The torsional analysis of general variable section elements is an adaptation of the formulation for thin-wall bars with constant section which has not been proven as applicable to arbitrary variable section piers, the case of hydraulic structures (Sapountzakis and Mokos 2004, Bazant 1965).

This paper presents a 3D extension of the gravity method employing FE sectional analysis to compute normal and shear stress distributions arising from the PMM-VVT problem for cracked spillway piers. The SSF is computed by integrating the normal stresses on remaining uncracked area where the Mohr-Coulomb failure criterion was not locally exceeded. It is intended that the model presented herein be

implemented in the dedicated software CADAM-3D (Leclerc and Léger 2011, Stefan and Léger 2008) to perform stability evaluation of hydraulic structures.

5.2 Problem statement

The proposed hydromechanical analysis of cracked spillway pier deals with their particularities: (a) squat wall behavior, (b) variable and cracked cross-section, and (c) UP, Fig. 5.1 (Stefan 2011). The analysis is performed in two stages.

The first one represents a cracking analysis of a section subjected to axial force P and biaxial moments M_x , M_y . The second one evaluates the shear stresses produced by the application of biaxial shear forces V_x , V_y (step 1) and torsion T (step 2).

The general assumptions of the proposed hydromechanical model are:

- (a) Plane sections before deformation remain plane after deformation (linear ε , σ). The material before and after cracking is linear, elastic, and isotropic; the Poisson ratio can be non-null.
- (b) Normal stresses σ_x and σ_y are neglected and shear strain (stress) γ_{xy} (τ_{xy}) is zero.

The planar σ_z distribution is computed with respect to the centroidal system $Oxyz$ (Fig. 5.2):

$$\sigma_{zB}(x, y, z) = -E(\sigma_{0z}(z) + \sigma_{1z}(z)(x - x_g(z)) + \sigma_{2z}(z)(y - y_g(z))) \quad (5.1)$$

$$\sigma_{0z}(z) = -\frac{1}{E} \cdot \frac{P}{A(z)} \quad (5.2)$$

$$\sigma_{1z}(z) = -\frac{1}{E} \cdot \frac{RM_y(z)I_x(z) - RM_x(z)I_{xy}(z)}{I_c(z)}; \quad \sigma_{2z}(z) = -\frac{1}{E} \cdot \frac{RM_x(z)I_y(z) - RM_y(z)I_{xy}(z)}{I_c(z)} \quad (5.3)$$

$$RM_x(z) = -M_x - P(e_y + y_{gP} - y_g) + V_y(z_P - z); \quad RM_y(z) = M_y - P(e_x + x_{gP} - x_g) + V_x(z_P - z) \quad (5.4)$$

where: P =axial force; e_x, e_y =eccentricities of P ; M_x, M_y =concentrated bending moments; V_x, V_y =shear forces; $x_g, y_g, A, I_x, I_y, I_{xy}$ are the centroidal coordinates and geometrical properties of the current section: the area, and the x, y and xy moments of inertia (they are z functions evaluated using the centroid of the section at z elevation); $I_c = I_x I_y - I_{xy}^2$; x_{gP}, y_{gP} are the centroid coordinates of the section where P is applied (top section); $z_P = L - L_s$, L, L_s is the column height and respectively the position of the reference section according to the base; E (G)=Young (shear) modulus; ν =Poisson ratio. All forces are applied on the point (x_{gP}, y_{gP}) . Important computational effort is saved by choosing the analyzed section at $z = 0$ instead of varying both L_s and z .

3D loads depending on section cracking. For a cracked section, the UP are not known at the beginning of the analysis as they are function of the cracking extent and direction. Moreover, most dam guidelines offer provision for updating the UP in the case of u/s cracking but they do not recommend strategies for the general case of 3D cracking scenarios. The *gravity method* is used to evaluate the loads and to reduce them to the centroid of the analyzed section. The cracking analysis finds the position of the neutral axis (NA) and the associated normal stresses due to the application of P - M_x - M_y loads. As the water enters the crack the geometrical and mechanical properties as well as the loads need updating the problem becoming nonlinear hydromechanical coupled.

5.3.1 Neutral axes and normal stresses evaluations

The algorithm searches the NA by performing several linear analyses (iterations) based on the modified *fixed point* scheme. For each iteration a NA is located and a cracked and uncracked part is identified. The UP are updated based on the current NA position and the specified strategy for 3D updating. To balance efficiency and accuracy two updating strategies are proposed: (a) two (several) planes, or (b) ruled surface to adapt different pressure gradients on the cracked and intact parts of the section. The next iteration uses only the uncracked part to evaluate a new NA. If between two iterations the NA variation is less than a prescribed tolerance, then the final NA position and the geometrical and mechanical properties of the cracked section are known. The normal stresses are evaluated with planar distribution of Eq. (5.1) and the geometrical properties of the remaining uncracked section. This algorithm is detailed in Stefan and Léger (2008).

5.4 Shear stresses from biaxial shear loads (VV)

In the first step of the second stage, using the NA from the first stage, the evaluation of the shear stresses is performed on the uncracked part of the section. To be as general as possible the proposed formulation for shear analysis of variable section members is displacement based using warping functions. Displacements in the x , y , and z direction are denoted u , v and w . Normal and shearing strains are ε and γ and normal and shear stresses are σ and τ (Fig. 5.2). Their standard equations are given in Theory of Elasticity (TE) textbooks (Timoshenko and Goodier 1970).

5.4.1 Strong form and finite element implementation

The strong form is based on the system of equilibrium equations of the TE. The last equation of this system and the associated boundary conditions written for solids in 3D space are:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0; \quad \text{and} \quad \tau_{xz} l_s + \tau_{yz} m_s + \sigma_z n_s = 0 \quad (5.5)$$

In Eq. (5.5) l_s , m_s and n_s represent the x , y and z component of \vec{n}_s , the outward three-dimensional normal

of Ω , Fig. 5.2. Employing the above assumptions in the strain equations ($\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$) from TE, integrating to obtain the displacement functions (u, v, w) and shear strains (γ_{xz}, γ_{yz}), and then computing stresses and inserting them in Eq. (5.5), the following strong form is deduced:

$$\left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = 0 \quad \Rightarrow \quad -\nabla^2 \psi_G = f(x, y) \Big|_{z=0} \quad (5.6)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{1+\nu} \cdot \frac{\partial \sigma_{zB}}{\partial z} + \underbrace{\frac{1}{2(1+\nu)} \int \nabla^2 \sigma_{zB} dz}_{=0 \text{ (for planar } \sigma_z)} = f_{fc} + x \cdot f_{fx} + y \cdot f_{fy} \quad (5.7)$$

$$f_{fc} = \frac{f_{vc}}{1+\nu}; \quad f_{fx} = \frac{f_{cx} + f_{vx}}{1+\nu}; \quad f_{fy} = \frac{f_{cy} + f_{vy}}{1+\nu}; \quad f_{cx} = \frac{V_x I_x - V_y I_{xy}}{I_c}; \quad f_{cy} = \frac{V_y I_y - V_x I_{xy}}{I_c} \quad (5.8)$$

$$f_{vc} = f_{1P} + f_{1RMx} + f_{1RM_y}; \quad f_{vx} = f_{2Px} + f_{2RM_{xx}} + f_{2RM_{yx}}; \quad f_{vy} = f_{2Py} + f_{2RM_{xy}} + f_{2RM_{yy}} \quad (5.9)$$

$$f_{1P} = -\frac{P}{A^2} A'; \quad f_{2Px} = -\frac{P}{I_c} (I_x x'_g - I_{xy} y'_g); \quad f_{2Py} = -\frac{P}{I_c} (I_y y'_g - I_{xy} x'_g) \quad (5.10)$$

$$f_{1RMx} = \frac{RM_x}{I_c} (I_y y'_g - I_{xy} x'_g); \quad f_{2RM_{xx}} = \frac{RM_x}{I_c} \left(-\frac{I_{xy}}{I_c} I'_c + I'_{xy} \right); \quad f_{2RM_{xy}} = \frac{RM_x}{I_c} \left(\frac{I_y}{I_c} I'_c - I'_y \right) \quad (5.11)$$

$$f_{1RM_y} = \frac{RM_y}{I_c} (I_x x'_g - I_{xy} y'_g); \quad f_{2RM_{yx}} = \frac{RM_y}{I_c} \left(\frac{I_x}{I_c} I'_c - I'_x \right); \quad f_{2RM_{yy}} = \frac{RM_y}{I_c} \left(-\frac{I_{xy}}{I_c} I'_c + I'_{xy} \right) \quad (5.12)$$

with prime sign standing for z derivative; z derivatives vanish for constant section and Eq. (5.6) becomes the strong form of shear analysis of constant section piers (Mason and Herrmann 1968).

5.4.2 Three-dimensional boundary conditions

To complete the strong formulation for *sectional analysis*, the boundary conditions must be defined using only functions having variability in Oxy plane. A relationship between the surface normal \vec{n}_s [Eq. (5.5)] and the sectional outward normal \vec{n} must be found. For $F(x, y, z) = 0$ the \vec{n}_s components are $\langle F'_x, F'_y, F'_z \rangle / L_{ns}$ and for $F(x, y, 0)$ the \vec{n} components are $\langle F'_x, F'_y \rangle / L_n$. Hence, this relationship is $\vec{n}_s = \langle l \cdot L_n, m \cdot L_n, F'_z \rangle / L_{ns}$; $L_{ns} = \sqrt{F'^2_x + F'^2_y + F'^2_z}$, $L_n = \sqrt{F'^2_x + F'^2_y}$, l and m are the x and y components of \vec{n} , and $F'_c = \partial F / \partial c$, c being x, y , or z (Dawkins 2007). The "planar" z component is defined as $n_z = F'_z / \sqrt{F'^2_x + F'^2_y}$ (the 3D z component divided by the length of the in-plane normal, L_n). Thus, Eq. (5.5) becomes an in-plane boundary condition:

$$\left(\tau_{xz} l + \tau_{yz} m - \sigma_z n_z \right) \Big|_{z=0} \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi_G}{\partial \vec{n}} = \left(-\sigma_{zB} n_z - \vec{h}_n(x, y) \cdot \vec{n} \right) \Big|_{z=0} \quad (5.13)$$

$$h_{nx}(x, y) = -\frac{v}{2} \left(x f_{fc} + \frac{x^2 - y^2}{2} f_{fx} + x y f_{fy} \right); \quad h_{ny}(x, y) = -\frac{v}{2} \left(y f_{fc} + x y f_{fx} + \frac{y^2 - x^2}{2} f_{fy} \right) \quad (5.14)$$

$$\tau_{xzS} = \frac{\partial \psi_G}{\partial x} + h_{nx}; \quad \tau_{yzS} = \frac{\partial \psi_G}{\partial y} + h_{ny} \quad (5.15)$$

The definition of the "planar" component n_z [Eq. (5.13)] is advantageous as it does not suppose the existence of the equation for the surface Ω . If the exterior pier boundary is discontinuous (e.g., abrupt slope change) or if the pier sizes come from in-site survey, the outside normal can still be evaluated and inserted in Eq. (5.13). The FE implementation of Eqs. (5.6), (5.13) follows the standard procedure presented in detail by Zienkiewicz and Taylor (2000).

5.4.3 Equilibrium check

The equilibrium for axial forces and biaxial bending moments is satisfied intrinsically by the planar variation of the normal stresses. For biaxial shear forces the equilibrium equations read:

$$\int_{A(z=0)} \tau_{xzS} dA = \int_A \tau_{xzS} + x \underbrace{\left(\frac{\partial \tau_{xzS}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yzS}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zB}}{\partial z} \right)}_{=0(\text{equilibrium equation})} dA = \int_A \frac{\partial (x \sigma_{zB})}{\partial z} dA - \int_{\Gamma} x \sigma_{zB} n_z ds = \frac{dM_y}{dz} = V_x \quad (5.16)$$

$$\int_{A(z=0)} \tau_{yzS} dA = \int_A \tau_{yzS} + y \underbrace{\left(\frac{\partial \tau_{xzS}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yzS}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zB}}{\partial z} \right)}_{=0(\text{equilibrium equation})} dA = \int_A \frac{\partial (y \sigma_{zB})}{\partial z} dA - \int_{\Gamma} y \sigma_{zB} n_z ds = \frac{dM_x}{dz} = V_y \quad (5.17)$$

the following property for differentiation under the sign of integral being used (Stefan 2011):

$$\frac{d}{dz} \int_{A(z)} f(x, y, z) dA = \int_{A(z)} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dA - \int_{\Gamma(z)} f(x, y, z) n_z ds \quad (5.18)$$

The torsion equilibrium is not yet satisfied at this step as the shear formulation, Eq. (5.6), postponed its treatment to another differential formulation in the next section. The total torsion is formed by three parts: (a) the direct applied torsion, (b) the torsion due to the distance between the centroid of the section where the shear forces are applied and that of the analyzed section, and (c) the torsion due to the section variability T_B . Thus:

$$T_B = \int_{A(z=0)} (-\tau_{xzS} \cdot y + \tau_{yzS} \cdot x) dA; \quad T_{tot} = T - V_x y_{gP} + V_y x_{gP} - T_B \quad (5.19)$$

The z derivatives for the f_i functions [Eqs. (5.10)-(5.12)] are computed numerically with the formula: $() = ()_2 - ()_1 / h$; $()$ symbolically represents a geometrical property and h is the distance between two close sections (for h the recommended value is ~ 0.0001 m, Yang et al. 2005).

5.5 Stresses from pure torsion (T)

The last step in the second stage is the sectional analysis of the uncracked part of the section subjected to

pure torsion. The formulation for torsionless bending intrinsically neglects the torsion by discarding some terms in the integration process as typically recommended in the literature (Timoshenko and Goodier 1970). The stresses evaluation from torsion is formulated individually as an independent problem. The total torsion [direct and from pure shear Eq. (5.19)] is applied on the section. Two mechanisms are used to resist torsion: (a) the uniform torsion (also called Saint-Venant, *SV*), and (b) the non-uniform torsion (also called warping torsion, *W*). For the first one, the longitudinal deformation is considered constant (or uniform) and no normal stresses are developed. For the second one, the bar is restrained longitudinally and the deformation is variable (or non-uniform) which generates both normal and shear stresses. The shear stresses from non-uniform torsion are due to the normal stresses variation like the shear stresses caused by normal stresses variation for bars in bending. The problem of uniform torsion for constant section bars is classical being completely solved by Saint-Venant (Timoshenko and Goodier 1970). However, the solution for non-uniform torsion is more demanding even for constant section elements (Sapountzakis and Mokos 2004).

5.5.1 Solution strategy

For solving the torsion case, this paper adapted the solution proposed by Sapountzakis and Mokos (2004). The main idea is to separate the original problem in two problems: one for Saint-Venant torsion and the other one for warping torsion. The first one follows the classical approach based on warping functions and solve a Laplace problem with pure Neumann boundary conditions:

$$\begin{cases} -\nabla^2 \varphi = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} = (y \cdot l - x \cdot m) \Big|_{z=0} \end{cases} \quad \text{with} \quad \tau_{xzSV} = G \frac{d\theta}{dz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right); \quad \tau_{yzSV} = G \frac{d\theta}{dz} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \quad (5.20)$$

Only shear stresses are produced by the strong form Eq. (5.20). The second one uses the warping function φ computed in Eq. (5.20) (called *primary*) and formulates a Poisson problem with homogenous pure Neumann boundary conditions:

$$\begin{cases} -\nabla^2 \varphi_S = \left(2(1 + \nu) \cdot \frac{d^3 \theta}{dz^3} \cdot \varphi \right) \Big|_{z=0} \\ \frac{\partial \varphi_S}{\partial n} = 0 \end{cases} \quad \text{with} \quad \sigma_{zzW} = E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \varphi; \quad \tau_{xzW} = G \frac{\partial \varphi_S}{\partial x}; \quad \tau_{yzW} = G \frac{\partial \varphi_S}{\partial y} \quad (5.21)$$

For this case, both normal and shear stresses are evaluated. The total shear stresses are the sum of the two contributions, *SV* and *W*:

$$\tau_{xzT} = \tau_{xzSV} + \tau_{xzW}, \quad \tau_{yzT} = \tau_{yzSV} + \tau_{yzW} \quad (5.22)$$

With normal stresses from cracking analysis, shear stresses from pure shear, and normal and shear stresses from pure torsion, one can compute the total stresses:

$$\sigma_z = \sigma_{zB} + \sigma_{zW}; \quad \tau_{xz} = \tau_{xzS} + \tau_{xzT}; \quad \tau_{yz} = \tau_{yzS} + \tau_{yzT} \quad (5.23)$$

In Eqs. (5.20) and (5.21) θ is the sectional twist angle which is assumed constant for all cross-section points (the section keeps its original shape even after longitudinal deformation). The warping functions in Eqs. (5.20), (5.21) are described according to the shear center.

5.5.2 Twist angle computation

The differential equation suggested for the twist angle of variable members reads (Sapountzakis and Mokos 2004; Eisenberger 1995; Bazant 1965):

$$\underbrace{GJ \frac{d\theta}{dz}}_{T_{sv}} - \underbrace{E \frac{d}{dz} \left(C_w \frac{d^2\theta}{dz^2} \right)}_{T_w} = GJ \frac{d\theta}{dz} - EC_w \frac{d^3\theta}{dz^3} - E \frac{dC_w}{dz} \frac{d^2\theta}{dz^2} = T_{tot} \Rightarrow T_{sv} + T_w = T_{tot} \quad (5.24)$$

where $J = \int_A x^2 + y^2 + x \frac{\partial \phi}{\partial y} - y \frac{\partial \phi}{\partial x} dA$ is the torsional constant and $C_w = \int_A \phi^2 dA$ is the warping constant.

Eq. (5.24) is solved numerically with a finite difference code (bvp4c) built in Matlab (Mathworks 2010) that implements a version of Runge-Kutta methods. To solve Eq. (5.24) $J(z)$, $C_w(z)$, $C_w'(z)$ and $T_{tot}(z)$ are evaluated by performing at specified computational points individual shear (T_{tot}) and SV torsion analysis (J , C_w). After extensive parametric analyses, we suggest that the number of computational points should be between 10 and 15 on each side of the crack for equilibrium error less than 2% and a reasonable computational speed. If the pier is not cracked and the variation is quite uniform, then these four functions (J , C_w , C_w' , T_{tot}) are monotones and they can be approximated by polynomials. For this case, the C_w derivative is computed directly by differentiating the polynomial. Where the pier is cracked the polynomial representation of these functions is not appropriate anymore. The recommended solution is the interpolation between neighbor segments (linear interpolation gives enough accuracy). The derivative of C_w is then computed numerically by the standard formula $C_w'(z) = (C_{w2} - C_{w1}) / h$, with C_{w2} (C_{w1}) = warping constant at elevation $z + h/2$ ($z - h/2$). Near the crack, due to the discontinuity created by the "zero-height" crack, special attention must be paid. Our suggestion is to assume a virtual crack opening ≥ 3 mm for computational purposes. This opening does not necessary correspond to real crack opening being a mathematical way to avoid equilibrium inaccuracy. The recommendation is confirmed by equilibrium check (PMM-VVT) in the case study and several problems solved while developing the paper; the relative equilibrium error always being $\leq 0.5\%$.

5.5.3 Equilibrium check

A key aspect of the proposed solutions is the equilibrium check. The "internal" (stress level) equilibrium is satisfied intrinsically by the equations of TE [Eqs. (5.20), (5.21)]. For pure torsion, "externally" (resultant level), the resultant of the *normal stresses* must be zero axial force and bending moments, and the

resultant of the *shear stresses* must be zero shear forces and non zero torsion moment (corresponding to the applied moment). The equilibrium for axial force and bending moments results by choosing the shear center. The external equilibrium of shear forces is ensured by the internal equilibrium equation and *homogenous boundary conditions* for shear stresses. The condition for torsion moment *generates* the torsion and warping constant J , C_w , and the *equation of twist angle* $T = GJ\theta' - EC_w\theta'''$ (Timoshenko and Goodier 1970, Bazant 1965).

5.5.4 Discussion on torsion formulation for variable section elements

The above described formulation for torsion of variable section bars is an adaptation of the one for constant section bars. Because three of the features of W torsion formulation could benefit from improvements (that are outside of the scope of this paper) it could be expected that the shear stresses computed with this formulation could exhibit some differences with those computed with a full 3D FE model. First, it does not consider that the warping function ϕ has a longitudinal variation and derivative (for a general case even the shape of the section can change along the pier height). Second, the boundary conditions are homogenous [Eq. (5.21)] instead of being in correlation with the warping normal stresses [e.g., Eq. (5.13)]. The non-homogenous boundary condition can prevent the shear forces (V_x , V_y) conditions to be satisfied, thus adding an additional complication. Third, unidirectional modification of twist angle equation to account for z variation of C_w is not necessary appropriate for arbitrary variable sections subjected to torsion, Eq. (5.24). This equation coming originally from the integration of shear stresses cannot be modified without affecting the shear stresses. In the original equations, each of the two terms (T_{SV} and T_W) are associated with specific shear stresses [Eqs. (5.20), (5.21)]. In the adapted equation, Eq. (5.24), the new term accounting for C_w derivative has no associated shear stress. For the thin-wall theory this unidirectional modification works because: (a) the shear stresses are proportional with T_W : $\tau = T_W S_w / C_w / t$, where S_w =sectorial static moment and t =element thickness (Kollbrunner and Basler 1969); (b) the warping torsion is *defined* externally. The equilibrium is forced from external to internal by *scaling* the shear stresses with the *defined* warping torsion T_W (Bazant 1965). For an arbitrary section, one can apply the same principle (thin-wall theory) by *scaling* the warping shear stresses to reinstall equilibrium. However, by doing so one could expect shear stress distribution to be closer to the one from thin-wall theory than the one from 3D FE.

5.6 Application examples

The three examples detailed in this section are intended to: (a) validate the proposed analysis model, (b) challenge its abilities to produce accurate stress distributions, and (c) explore its characteristics and limits. The validation is done by using (a) self-developed 2D FE sectional analysis code written in Matlab (Mathworks 2010) and Gmsh mesher (Geuzaine and Remacle 2009), (b) analytical results, (c) full 3D FE

models analyzed with the commercial software SAP 2000 (CSI 2009), and (d) typical boundary points where the values are manually computed. The 2D FE code uses quadratic triangular elements (LST) with 1 degree of freedom (DOF)/node; for 3D SAP 2000 model the FE are the solid elements with 8 nodes and 3 DOF/node having the incompatible modes activated. All the columns are fully fixed at the bottom and the analyzed section is located at the quarter of the height with respect to the base. Material characteristics are given for each example on the appropriate figure. For all examples the six external equilibrium conditions (three forces and three moments) are satisfied with less than 0.5% relative error.

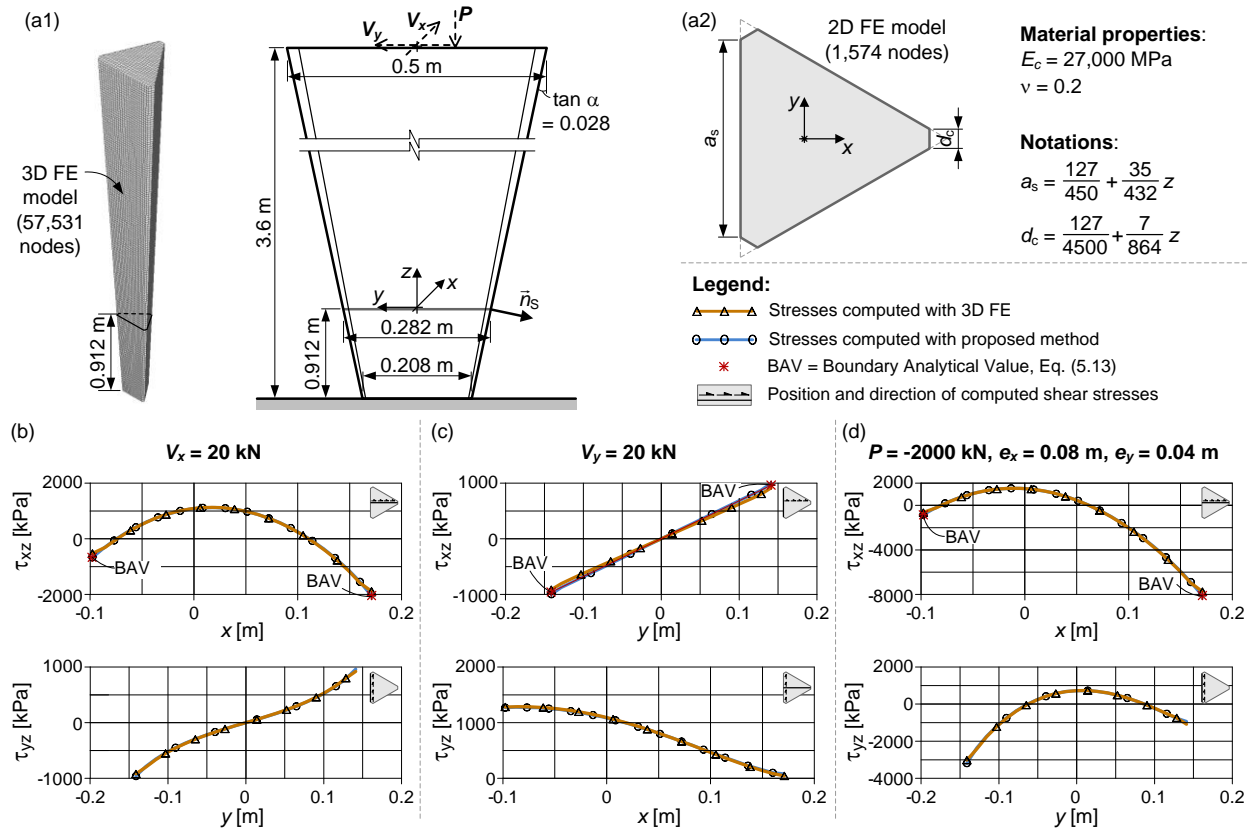


Fig. 5.3 Pier with triangular cross-section: (a) model description; and structural responses for applied forces (b) V_x , (c) V_y , and (d) P , e_x , e_y

5.6.1 Column with three-dimensional section variability

The first example represents the analysis of a typical 3D variable slender column having a minimum ratio between the pier height and section height of 7.2, Fig. 5.3. For this kind of pier the assumption of linear normal stresses is practically true, the shear deformations are minimal and the torsion response is mainly attributed to SV torsion. Three load scenarios are analyzed: shear force along x axis, shear forces along y axis, and an eccentrically axial force. The number of DOF for the 2D planar sectional model is 1,574

compared to 172,593 DOF for full 3D FE model. By comparing the results computed with the two models no noticeable difference exists for all loading scenarios. Even if a torsion load case is not presented due to the limited space, this case was analyzed and the difference between the two models was also found to be practically zero.

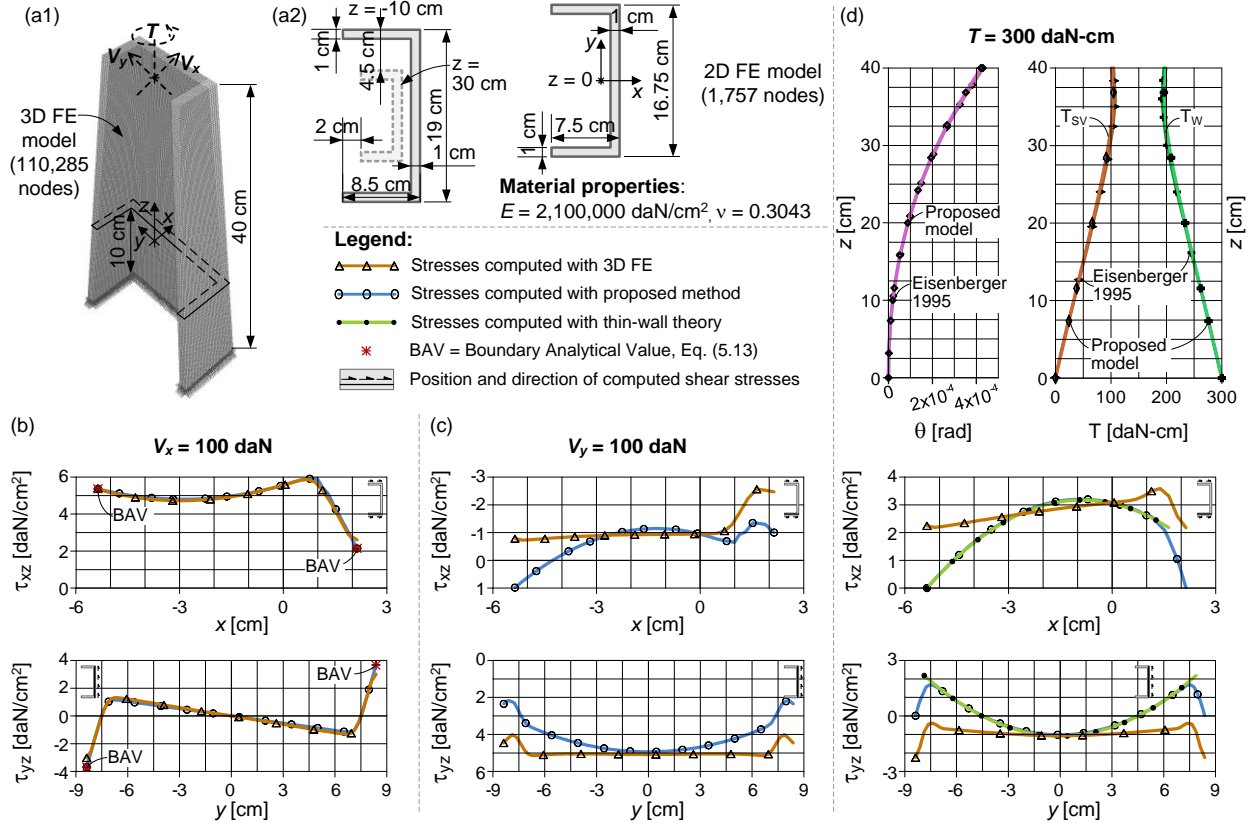


Fig. 5.4 Pier with U-shaped cross-section: (a) model description; and structural responses for applied forces (b) V_x , (c) V_y , and (d) T

5.6.2 U-shaped variable section column

The aim of the second example is to check the quality of the proposed analysis model for thin-wall bars, Fig. 5.4. Knowing that for thin-wall bars the main mechanism to resist torsion is the warping torsion, this example is also designed to test the capacity of the proposed model to reproduce warping shear stresses by comparing them with the thin-wall theory as well as with full 3D FE. The assumption that the normal bending shear stresses are planar is also appropriate, for this example. The number of DOF for 2D model is 1,757 compared to 330,855 DOF for full 3D FE model. When shear load is applied in the x direction (zero torsion), the results of the 2D and 3D models are practically identical, Fig. 5.4(b). When the shear load is applied in the y direction, a torsion moment is generated and the difference between the 2D and 3D

model is more important Fig. 5.4(c). For pure torsion, Fig. 5.4(d) shows a difference between the 2D and 3D models even if the rotation and the torsion distribution (SV and W) are practically identical with those called "exact solution" by Eisenberger (1995). As expected, the scaled shear stress distributions of the 2D model look very similar to those of the thin-wall theory, Fig. 5.4(d); the scale coefficient multiplying $\tau_{xz} w$ and $\tau_{yz} w$ to reestablish equilibrium equals -1.3507. The shear response to V_y can be symbolically seen as a sum of responses from V and T . As the distribution for V presents small precision errors [e.g., Fig. 5.4(b)] but the response from torsion shows more important differences, it could be concluded that the symbolical summation $V+T$ can explain the source of error. The inexactitudes in the torsion formulation propagate in the response from V_y as also indicated by the very similar trend in the V_y and T responses, Fig. 5.4(c) vs. 4(d).

5.6.3 Cracked concrete spillway pier

The last example is dedicated to stress and stability hydromechanical analysis of a real spillway pier located in Canada, subjected to forces evaluated according to Canadian Dam Association guidelines (CDA 2007), Fig. 5.5. Two cases for nonlinear hydromechanical cracking analysis are addressed (u/s and arbitrary cracking). For both of them, the UP are iteratively updated following the crack evolution. Due to the "squat wall" behavior and section cracking, the assumption that normal bending stresses are planar is not strictly appropriate. The DOF number for 2D model is 2,195 [Fig. 5.5(b)] and 1,465 [Fig. 5.5(c)] compared to 171,573 DOF for the full 3D FE model.

5.6.3.1 Neutral axis along strong bending axis

For this case, the section is subjected to axial force, bending moment and shear force; the torsion (direct or internal) is zero, Fig. 5.5(b). The planar normal stress distribution acts as an average of the nonlinear distribution from full 3D FE showing stress concentration at the crack tip, Fig. 5.5(b2). The shear stress distribution from the 2D FE is very close to the one related to the 3D FE.

5.6.3.2 Arbitrary neutral axis

For this case, the section can crack arbitrarily being subjected to a real 3D load combination, $P-M_x-M_y-V_x-V_y-T$, Fig. 5.5(c). The normal stresses present important nonlinearity (stress concentration) but the planar distribution still represents a reasonable average. The torsion analysis is more challenging due to the abrupt change in the torsion properties and its longitudinal distribution, Fig. 5.5(c3). As described before, by carefully choosing the parameters in the numerical derivative computation, instability problems are avoided and the twist angle and derivatives are obtained with suitable precision; the maximum equilibrium error is 0.44%. By analyzing Figs. 5(c4)-(c7) one can observe that when the Poisson ratio is zero, the shear stresses issued from 2D FE are similar to the one from the 3D FE model even near the cracked tip of the section [$y = 1.22$, Figs. 5(c1), 5(c5)].

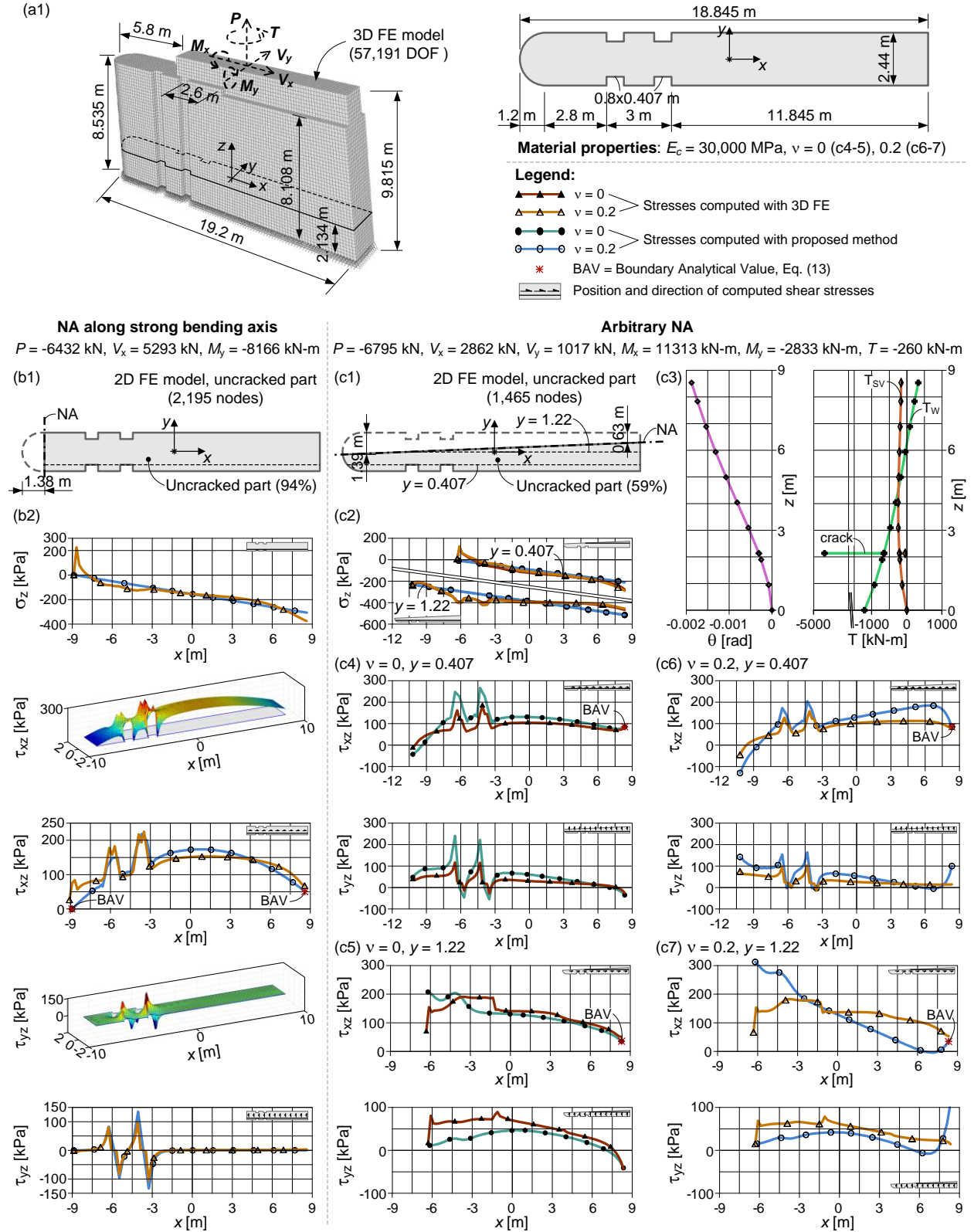


Fig. 5.5 Cracked spillway pier subjected to three-dimensional loads: (a) model description; and structural responses for neutral axis along the strong bending axis (b) and for arbitrary neutral axis position (c)

For the case of non-null Poisson ratio, the differences between the two models are more noticeable especially near the cracked tip of the section. These differences can be explained by the nonlinear normal stress distribution and the imprecision in the warping torsion formulation, the section being subjected to important warping torsion. However, from an engineering point of view these distributions can be acceptable for preliminary pier evaluation. The SSF are key indicators for the safety assessment of hydraulic structures. Dam guidelines propose SSF with the standard formula: $SSF = (P \cdot \tan(\phi) + c \cdot A_c) / V$, where P and V =resultant axial and driving shear forces, A_c =compressed area where the cohesion c is considered, and ϕ =material internal friction angle, Fig. 5.6. With $\phi = 45^\circ$ and $c = 0$ inserted in the above formula, the $SSF = 2.24$. To account for the actual stress distribution including torsion, the new $SSF_T = (P_\tau \cdot \tan(\phi) + c \cdot A_{c\tau}) / V$ is proposed herein; P_τ =axial resultant computed as the normal stresses integration over $A_{c\tau}$ area defined where the point Mohr-Coulomb shear resistance is not exceeded ($\tau \leq \sigma \cdot \tan(\phi) + c$), Fig. 5.6(b). Using the same material coefficients, the $SSF_T = 2.09$. No scaling for warping shear stresses was necessary.

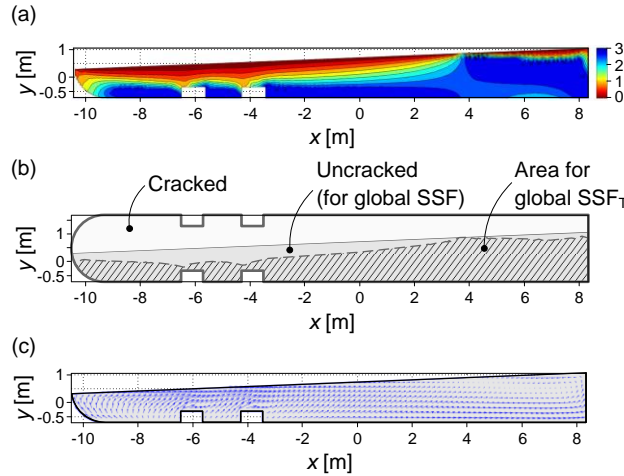


Fig. 5.6 Sliding safety factors (SSF): (a) local SSF isosurfaces; (b) global SSFT evaluation strategy; and (c) sliding tendency

5.7 Summary and conclusions

This paper presents a general mathematical and finite element (FE) formulation for integrated 3D cracking, stress and stability hydromechanical analysis of concrete spillway pier with variable section, extending on rational basis the so-called "gravity method". The model uses equilibrium and compatibility equations for linear elastic materials with non-null Poisson ratio. It is able to deal with: (a) arbitrary cross-sections, (b) arbitrary longitudinal variations, (c) arbitrary load combinations (P - M_x - M_y - V_x - V_y - T) including

Saint-Venant and warping torsion, (d) concrete cracking, (e) related uplift pressures, and (f) localized Mohr-Coulomb failure criterion. The only limitation is the assumption of planar bending normal stress. That is an inherent assumption in all dam safety guidelines requiring to meet mandatory related sliding safety factors (SSF). The normal and shear stress distributions from the methodology developed herein, and validated with full 3D FE analysis, are appropriate for safety assessment of spillway piers in a progressive methodology where hydraulic structures have to be periodically evaluated to comply with the increasing demands of regulatory agencies. The main conclusions can be summarized as follows:

- (i) The analysis model is *robust* being able to adequately handle nonlinear hydromechanical cracking analysis and elastic shear distribution evaluation for cracked hydraulic structures even when subjected to difficult mechanical or mathematical conditions: "squat wall" behavior, variable cross-sections, joints and discontinuities, uplift pressures, ...
- (ii) The 2D *sectional analysis* of variable section piers subjected to 3D loads is feasible and represents an efficient option to the more sophisticated 3D FE analysis for several reasons: (a) important reduction in resources and computational effort, (b) minimum loss of accuracy for typical slender columns, (c) adequate shear stress distribution for cracked squat piers. The proposed model is a powerful tool for practicing engineers to perform sectional analysis only at elevations of interest without significant precision loss.
- (iii) The philosophy of the proposed formulation is appropriate for "gravity method" like methods, for cracking evaluation and *sliding safety factors* computation (direct assessment of spillway stability) as suggested by several dam guidelines and can be implemented in dedicated 3D dam stability software, such as CADAM-3D. It helps the design engineer to make better decision based on strength of materials models before using more resource demanding procedures, such as full 3D finite element analyses, that are difficult to interpret without sophisticated post-processor tool.

The proposed 3D extension of the gravity method is now able to handle the hydromechanical PMM-VVT problem for cracked concrete sections of arbitrary geometry on rational and efficient basis using strength of materials principles and numerical sectional analysis. Moreover, it leads to performance indicators (cracking extent, SSF) widely accepted by the profession.

5.8 Acknowledgments

The financial support provided by Quebec Fund for Research on Nature and Technology, and Natural Science and Engineering Research Council of Canada is acknowledged.

5.9 References

- Bazant, Z. (1965). "Nonuniform torsion of thin-walled bars of variable cross-section." *IABSE Zurich*, 25, 245-267.
- Brnic, J., Turkalj, G., and Canadija, M. (2010). "Shear stress analysis in engineering beams using deplanation field of special 2-D finite elements." *Meccanica*, 45(2), 227-235.
- Canadian Dam Association (CDA). (2007). *Dam safety guidelines*, Edmonton, Canada.
- Computers and Structures, Inc., (2009). *CSI Analysis reference manual for SAP2000®*, <<http://www.csiberkeley.com>>.
- Dawkins, P. (2007). "Gradient vector, tangent planes and normal lines." *Calculus III*, 111-112, <<http://tutorial.math.lamar.edu/downloadfile.aspx?file=B,11,N>> (Jun. 25, 2011).
- Eisenberger, M. (1995). "Nonuniform torsional analysis of variable and open cross-section bars." *Thin-Walled Struct.*, 21(2), 93-105.
- Federal Energy Regulatory Commission (FERC). (2002). "Chapter 3: Gravity dams." *Engineering guidelines for the evaluation of hydropower projects*, Dept. of Energy, Washington, D.C.
- Furlong, R. W., Hsu, C. T. T., and Mirza, S. A. (2004). "Analysis and design of concrete columns for biaxial bending - overview." *ACI Struct. J.*, 101(3), 413-423.
- Geuzaine, C., and Remacle, J.-F. (2009). "Gmsh: a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities." *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, 79(11), 1309-1331.
- Gruttmann, F., Sauer, R., and Wagner, W. (1999). "Shear stresses in prismatic beams with arbitrary cross-sections." *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 45(7), 865-889.
- Kollbrunner, C. F., and Basler, K. (1969). *Torsion in structures*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, Germany.
- Leclerc, M., and Léger, P. (2011). *CADAM-3D, version 2 - User's manual*, Ecole Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada (in French).

Leclerc, M., Léger, P., and Tinawi, R. (2003). "Computer aided stability analysis of gravity dams - CADAM." *Adv. Eng. Software*, 34(7), 403-420.

Mason, W. E., and Herrmann, L. R. (1968). "Elastic shear analysis of general prismatic beams." *ASCE J. Eng. Mech.*, 94(EM4), 965-983.

MathWorks, Inc., (2010). *Matlab* ® 7 - *Programming Tips*, <<http://www.mathworks.com>>.

Ministry of National Integration Brezil (BMNI). (2002). *Manual for safety and inspection of dams*, Brasilia, Brezil (in Portuguese).

Pugsley, A. G., and Weatherhead, R. A. (1942). "The shear stresses in tapered beams." *J. Roy. Aeronaut. Soc.*, 46(381), 218-226.

Reagan, S. W., and Pilkey, W. D. (2002). "Constrained torsion of prismatic bars." *Finite Elem. Anal. Des.*, 38(10), 909-919.

Rodriguez, J. M., and Viano, J. M. (1997). "Asymptotic derivation of a general linear model for thin-walled elastic rods." *Comput. Method. Appl. M.*, 147(3-4), 287-321.

Russo, E. P., and Garic, G. (1992). "Shear-stress distribution in symmetrically tapered cantilever beam." *ASCE J. Struct. Eng.*, 118(11), 3243-3249.

Sapountzakis, E. J., and Mokos, V. G. (2007). "3-D beam element of composite cross section including warping and shear deformation effects." *Comput. Struct.*, 85(1-2), 102-116.

Sapountzakis, E. J., and Mokos, V. G. (2004). "Nonuniform torsion of bars of variable cross section." *Comput. Struct.*, 82(9-10), 703-715.

Stefan, L. (2011). "Constitutive hydromechanical three-dimensional model for stability analysis of spillway piers." PhD Thesis, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada (in French).

Stefan, L., and Léger, P. (2008). "Extension of the gravity method for 3D cracking analysis of spillway piers including uplift pressures." *J. Struct. Eng.*, 134(8), 1278-1287.

Timoshenko, S. P., and Goodier, J. N. (1970). *Theory of elasticity*, 3rd Ed., McGraw-Hill, Toronto.

U.S. Army Corps of Engineers (USACE). (1995). *Engineering and design: Gravity dam design - Rep. EM 1110-2-2200*, Washington, D.C.

United States Bureau of Reclamation (USBR). (1987). *Design of small dams*, 3rd Ed., Denver.

Yang, W. Y., Cao, W., Chung, T.-S., and Morris, J. (2005). *Applied Numerical Methods Using Matlab*, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey.

Zienkiewicz, O. C., and Taylor, R. L. (2000). *The finite element method. Volume 1: The basis*, 5th Ed., Butterworth-Heinemann, Woburn, MA.

CHAPITRE 6

DISCUSSIONS ET CONSIDÉRATIONS COMPLÉMENTAIRES

Cette partie présente des détails supplémentaires sur les méthodes développées dans le contexte des articles mais qui n'y ont pas été ajoutées à cause de l'espace limité.

6.1 Points caractéristiques des courbes PM ($\alpha = \text{constant}$)

Les principales propriétés des courbes PM étant décrites au chapitre 3, on montre ci-dessous les points caractéristiques de la courbe ainsi que les techniques pour les obtenir.

Les techniques de calcul pour les points caractéristiques peuvent être non linéaires mais l'existence et l'unicité de la solution sont assurées. On comprend par "points caractéristiques" les points : A , A_I , A_{II} , B_I , C_{II} , C , Fig. 6.1(a).

Les particularités de ces points sont montrées dans le tableau 6.1 et la Fig. 6.1; pour chaque point il faut appliquer l'état de déformation indiqué et intégrer les contraintes produites afin d'obtenir les efforts résultants. Afin de trouver les points A , A_I , A_{II} , C_{II} , C , qui correspondent à un angle α donné, on utilise la théorie linéaire élastique (l'AN ne coupe pas la section); cependant, pour les points entre A_{II} et C_{II} une approche par bisection des inclinaisons de l'AN est recommandée afin d'arriver à l'angle α à partir de l'angle θ de l'AN.

Tableau 6.1 Points caractéristiques de la courbe PM

Point	Définition	Technique de calcul
A	- compression pure uniforme ($P < 0$)	- appliquer un état de déformation ε constante de compression sur la section au complet;
A_I	- charge axiale appliquée sur le point de référence	- si les points A et A_{II} ne se trouve pas du même côté de l'axe OP alors A_I représente l'intersection des droites OP et $A-A_{II}$ (cas usuel); - si non, utiliser une méthode non linéaire pour trouver la charge axiale maximale pouvant être appliquée au point de référence quand l'AN coupe la section (cas rare);
A_{II}	- l'AN est tangente à la section (force sur le noyau central)	- appliquer un état de déformation ε triangulaire sur la section (la section est complètement comprimée), Fig. 6.1(b);
$A_{II}-C_{II}$	- l'AN coupe la section	- appliquer un état de déformation ε qui a zéro à l'AN et une valeur désirée à l'extrémité; l'AN balaye la section;
B_I	- flexion pure ($P = 0$)	- lancer une recherche géométrique et trouver la position de l'AN qui satisfait l'angle α désiré en passant par le centroïde;
C_{II}	- l'AN est tangente à la section	- appliquer un état de déformation ε triangulaire sur la section (la section est complètement tendue), Fig. 6.1(b);
C	- tension pure uniforme ($P \geq 0$)	- appliquer un état de déformation ε constante de tension sur la section au complet;

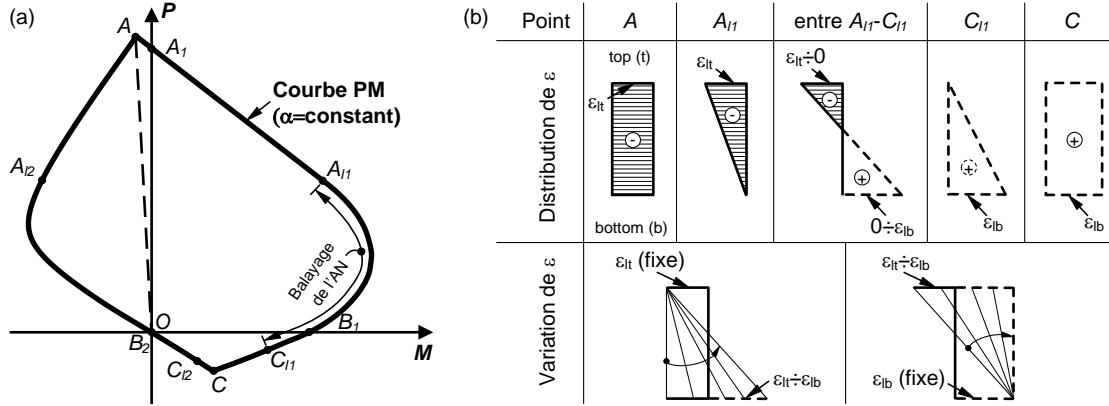


Fig. 6.1 Points caractéristiques des courbes PM : (a) courbe; et (b) l'évolution de ε

Par exemple, on pourrait déterminer le point B_1 pour un angle α_d donné en trois étapes : (a) on commence avec θ_1 initial et avec la recherche géométrique on trouve la position de l'AN pour l'angle $\alpha_1 > \alpha_d$; (b) on répète la même opération avec θ_2 pour avoir un angle $\alpha_2 > \alpha_d$; (c) après la définition de ces bornes on applique un algorithme non linéaire classique (e.g., bisection) pour trouver l'angle θ qui corresponde à α [si la section n'a aucune partie résistant à la tension pour une direction donnée alors son point B est superposé à l'origine O , Fig. 6.1(a)]. Bien que cette stratégie soit très rapide (même avec un chiffrier), on pourrait aussi utiliser alternativement l'approche ci-dessous. Les AN qui correspondent aux points A, A_{11}, B_1, C_{11} et C peuvent être vus comme propriétés géométriques de la section parce que leurs positions ne dépend que des propriétés géométriques de la section (aire, moment d'inertie, etc.).

Un des désavantages, souvent mentionné dans la littérature, de l'approche isogonique est sa difficulté pour la construction des courbes PM ($\alpha = \text{cst.}$) ou des contours MM ($P = \text{cst.}$). Si on pose cette construction comme un problème de géométrie computationnelle ce désavantage est éliminé. D'abord, on génère les isogonions qui sont des courbes 3D gauches formées par des points liés avec des segments de droites dans l'espace PMM; il n'y a pas d'intersection entre les isogonions dans l'espace, elles se suivent une après l'autre. Ensuite, on calcule le contour MM comme l'intersection entre les isogonions et le plan horizontal au niveau $P_{gi} = \text{cst.}$: (i) pour chaque isogonion j on trouve le point qui est juste au-dessus (M_{x1}, M_{y1}, P_1) et celui qui est juste au-dessous (M_{x2}, M_{y2}, P_2) du plan $P_{gi} = \text{cst.}$; (ii) on détermine le moment qui correspond à l'isogonion j avec les équations : $M_{xgj} = M_{x1} + (P_{gi} - P_1)/(P_2 - P_1) \cdot (M_{x2} - M_{x1})$ et $M_{ygj} = M_{y1} + (P_{gi} - P_1)/(P_2 - P_1) \cdot (M_{y2} - M_{y1})$; (iii) en réunissant tous les points (M_{xgj}, M_{ygj}) on a le contour MM pour P_{gi} ; (iv) finalement, en variant la charge axiale P_{gi} on calcule tous les contours MM et aussi le diagramme PMM 3D, Fig. 3.7(c). Afin d'obtenir les équations précédentes la droite 3D qui relie les points de l'isogonion est mise sous forme paramétrique [$M_x = M_{x1} + (M_{x2} - M_{x1}) \cdot t$, $M_y = M_{y1} + (M_{y2} - M_{y1}) \cdot t$, $P_z = P_1 + (P_2 - P_1) \cdot t$, $t \in [0,$

1] et on élimine le paramètre t entre les équations avec la condition : $P_{gi} = P_I + (P_2 - P_I) \cdot t$. Une courbe PM pour un α donné est générée par l'intersection entre le volume 3D et le plan orienté à l'angle α [dans ce cas la condition à imposer est $M_y/M_x = \tan \alpha$ qui conduit à $t = (M_x \cdot \tan \alpha - M_{yI}) / (M_{y2} - M_{yI})$]. En suivant les démarches ci-dessus, on pourrait construire des courbes PM à partir des contours MM.

La méthode mentionnée ici, pour tracer les courbes PM et les contours MM, est appropriée pour le calcul manuel et automatisé. Elle est très rapide même comme version développée dans un chiffrier sans l'utilisation d'un langage de programmation. Le chiffrier prends ~7 minutes pour générer le diagramme PMM complet 3D avec un pas angulaire de 5° et vingt pas entre A_{II} - C_{II} (au total 1440 pas); il a besoin de ~1 minute pour construire une courbe PM si le diagramme PMM 3D n'est pas donné, si non la construction est pratiquement instantanée (microprocesseur à 1.86 GHz avec 512 MB de mémoire). Pour des applications pratiques d'ingénierie la portion A_{II} - C_{II} peut être approximée de manière conservatrice avec de trois à cinq positions de l'AN.

6.2 Aspects complémentaires de l'influence des sous-pressions sur l'analyse PMM

Les sous-pressions (SP) sont des charges qui affectent beaucoup l'analyse de la section ainsi que la stabilité numérique des algorithmes impliqués. Ces algorithmes doivent converger avec une variété des SP : depuis le cas des SP réduites axialement qui amplifient l'excentricité (cas fréquent) jusqu'aux SP comparables aux charges stabilisatrices (petits barrages, prises d'eau à sec etc.). Cette section présente des aspects liés à la considération des SP en algorithmes non linéaires.

6.2.1 Techniques d'actualisation des SP

Les algorithmes non linéaires d'analyse de fissuration d'une section de structures hydrauliques soumise à un état de chargement PMM, actualisent les SP en suivant le processus de fissuration (Stefan et Léger 2008). Si la distribution des SP a une partie modifiable est une partie fixe par rapport à la fissuration, deux solutions sont parfois possibles pour une charge axiale appliquée (chapitre 3). Suite aux essais faits pour plusieurs distributions discontinues des SP et différents ratios entre les charges appliquées et les SP modifiables, on présente les recommandations ci-dessous applicables aux algorithmes non linéaires qui font des analyses de fissuration de SH :

- il faut faire deux analyses distinctes (SP modifiables) : la première qui néglige l'actualisation des SP et la deuxième qui la considère; on accepte une solution si elle correspond à une position de l'AN qui donne les SP pour lesquelles la solution a été calculée (e.g., la position de l'AN pour le cas avec des SP fixes doit se trouver à l'extérieur de la zone des SP modifiables);
- il est préférable de commencer l'analyse avec des SP nulles; si l'analyse ne converge pas on modifiera ces SP initiales avec d'autres valeurs (SP non fissurée, arbitraires);

- il est mieux d'actualiser les SP après plusieurs itérations mécaniques (après que le processus soit pratiquement convergent) qu'à chaque itération;
- afin de trouver une solution dans la zone modifiable des SP il faut empêcher que l'AN sorte de la zone modifiable pendant les itérations; ainsi, un algorithme auto adaptable peut s'avérer utile (Stefan et Léger 2008; Yau et al. 1993).

6.2.2 Caractéristiques des diagrammes *PMMa*

La variation des SP et ses discontinuités modifient la forme "classique" du diagramme *PMMa*, Fig. 6.2. Il est formé de portions distinctes qui peuvent être concaves (segment $O_1-O_a-O_2$) et qui peuvent être mutuellement intersectées. Les caractéristiques de la courbe *PMMa* restent les mêmes peu importe le critère pour lequel le diagramme est construit; pourtant, pour concision en ce paragraphe on suppose que le critère utilisé est la contrainte maximale σ_{zm} .

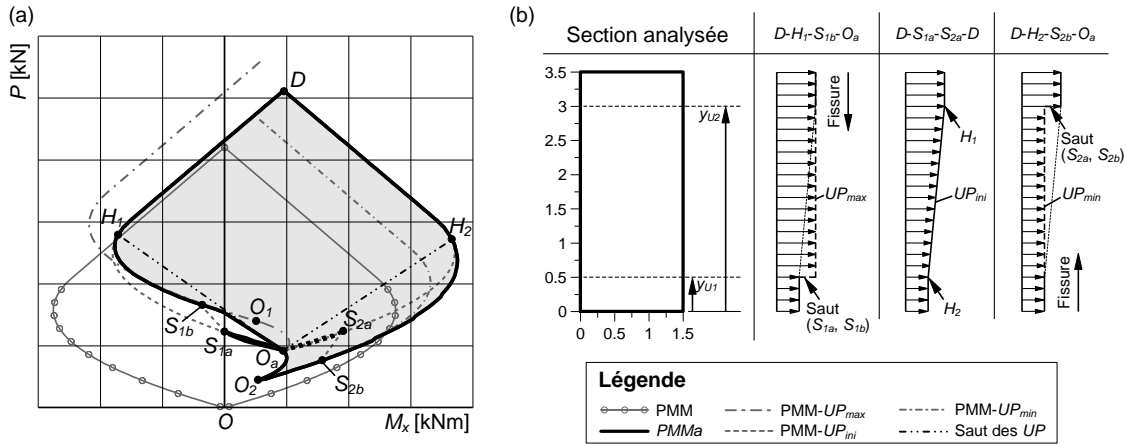


Fig. 6.2 Caractéristiques des diagrammes *PMMa* : (a) diagramme *PMMa*; (b) distribution des SP

En analysant en détail la courbe *PMMa* de la Fig. 6.2 on constate que (Tableau 6.2) :

- la première partie du *PMMa*, entre le point de D et le point où les UP deviennent variables H_1 ou H_2 , est identique avec la translation *PMM-UP_{ini}* (e.g., $D-H_2$);
- la deuxième partie représente un passage entre *PMM-UP_{ini}* et *PMM-UP_{max}* ou *PMM-UP_{min}*, selon la direction de la fissuration, jusqu'au point de saut S_1 ou S_2 (e.g., H_2-S_2);
- après le point de saut le diagramme est composé de deux parties séparées (ces parties apparaissent à cause de la discontinuité de UP) :
 - (1) celle, qui est distincte, à l'intérieur ($S_{2a}-O_a$) ou à l'extérieur ($S_{1a}-O_a$) du diagramme principal et qui peut être calculée avec la relation *PMM-UP_{ini}*;

- (2) celle qui forme un raccord entre l'origine O_a et $\text{PMM-UP}_{\max}(S_{1b}-O_I-O_a)$ ou $\text{PMM-UP}_{\min}(S_{2b}-O_2-O_a)$ selon le cas; on observe que : comme la courbe $D-H_I-O_a-H_2-D$ enveloppe seulement des points valides (parce qu'ils correspondent aux points de translation du diagramme PMM) il faut vérifier si la partie de raccord est à l'intérieur de cette courbe; si oui PMMa suivra $D-H_I-O_a-H_2-D$ (e.g. la partie O_I-O_a est ignorée pour continuer sur H_I-O_a).

Tableau 6.2 Particularités des parties de PMMa

Partie	Position de l'AN, y_{AN}	Contrainte maximale, σ_z	Observations
$D-H_I$	$y_{AN} \in [y_{U2}, \infty]$	$\sigma_z = \sigma_{zm}$	• Translation PMM-UP_{\min}
H_I-O_a	$y_{AN} = y_{U2}$	$\sigma_z \in [0, \sigma_{zm}]$	• Droite qui marque le début de la zone modifiable
H_I-S_{1b}	$y_{AN} \in [y_{U1}, y_{U2}]$	$\sigma_z = \sigma_{zm}$	• UP varie entre UP_{\min} et UP_{\max}
$S_{1b}-O_I$	$y_{AN} = y_{U1}$	$\sigma_z \in [0, \sigma_{zm}]$	• $\text{UP} = \text{UP}_{\max}$
O_I-O_a	$y_{AN} \in [y_{U1}, y_{U2}]$	$\sigma_z \approx 0$	• UP varie entre UP_{\min} et UP_{\max}
$S_{1b}-O_a$	$y_{AN} = y_{U1}$ ou $y_{AN} = y_{U2}$	$\sigma_z \in [0, \sigma_{zm}]$	• Voir l'intersection entre H_I-O_a et $S_{1b}-O_I$
$S_{1a}-O_a$	$y_{AN} \in [-\infty, y_{U1}]$	$\sigma_z \in [0, \sigma_{zm}]$	• Translation PMM-UP_{\min}
$D-H_2$	$y_{AN} \in [-\infty, y_{U1}]$	$\sigma_z = \sigma_{zm}$	• Translation PMM-UP_{\min}
H_2-O_a	$y_{AN} = y_{U1}$	$\sigma_z \in [0, \sigma_{zm}]$	• Droite qui marque le début de la zone modifiable
H_2-S_{2b}	$y_{AN} \in [y_{U1}, y_{U2}]$	$\sigma_z = \sigma_{zm}$	• UP varie entre UP_{\min} et UP_{\max}
$S_{2b}-O_2$	$y_{AN} = y_{U2}$	$\sigma_z \in [0, \sigma_{zm}]$	• $\text{UP} = \text{UP}_{\min}$
O_2-O_a	$y_{AN} \in [y_{U1}, y_{U2}]$	$\sigma_z \approx 0$	• UP varie entre UP_{\min} et UP_{\max}
$S_{2a}-O_a$	$y_{AN} \in [y_{U2}, \infty]$	$\sigma_z \in [0, \sigma_{zm}]$	• Translation PMM-UP_{\min}

Observation 1 : Des méthodes alternatives pour la construction du diagramme PMMa pourraient être envisageables suite à ses particularités. Les portions $D-H_I$, $S_{1a}-O_a$, $D-H_2$, $S_{2a}-O_a$ sont facilement obtenues par la translation PMM-UP_{\min} ; aussi, $S_{1b}-O_I-O_a$ et $S_{2b}-O_2-O_a$ sont calculées en suivant leurs propriétés (e.g., pour $S_{1b}-O_I$ on garde $y_{AN} = y_{U1}$ en variant σ_z tandis que pour O_I-O_a on garde $\sigma_z \approx 0$ en variant y_{AN}). Les parties les plus difficiles restent celles où les UP varient : H_I-S_{1b} et H_2-S_{2b} . Des solutions conservatrices pourraient être étudiées : (1) tracer une droite entre les deux points (e.g., droite entre H_I et S_{1b}); (2) générer PMMa en appliquant la différence PMM-UP (UP correspondant à la position de l'AN du point de calcul) seulement aux points du contour de PMM (le diagramme source); (3) utiliser l'algorithme du chapitre 3 seulement pour les points qui se trouvent entre H_I ou H_2 et le point où on se retrouve sur PMM-UP_{\max} ou PMM-UP_{\min} (e.g. on observe à la Fig. 6.2 que le diagramme descend rapidement à partir du point H_I sur la courbe PMM-UP_{\max} et, par la suite, dès qu'on a atteint la courbe PMM-UP_{\max} on pourrait continuer simplement sur elle). Bien que ces méthodes soient plus rapides leur exactitude n'est pas garantie pour un cas général. Toutefois, on recommande leur utilisation lors de la validation d'un diagramme généré avec une technique plus élaborée (voir chapitre 3).

Observation 2 : La technique de construction du diagramme PMMa (calcul des SP pour chaque point du PMM) assure que pour tous les points du PMMa au moins une solution existe. Ainsi, PMMa peut être

utilisé comme preuve d'existence de la solution d'un problème d'analyse de flexion biaxiale hydromécanique couplée. Si un point est situé à l'intérieur du *PMMa* mais un algorithme non linéaire ne trouve pas une solution pour ce point alors il faut essayer d'autres schémas non linéaires (e.g., la partie O_2 - O_a qui peut causer des difficultés de convergence).

6.2.3 Interprétation et utilisation des diagrammes *PMMa*

Le diagramme PMM est symboliquement vu comme la somme entre le diagramme *PMMa* et les SP correspondantes (voir chapitre 3). Le rapport entre les charges directement appliquées P_a et les SP devient important parce que la participation de P_a et SP dans la somme est différente. La résultante des SP est, en général, beaucoup plus petite que la *capacité axiale* de la section. Cependant, les *charges réelles appliquées* sur les SH sont souvent plus grandes mais comparables aux SP. Pour des charges axiales réduites c'est l'excentricité de la charge qui joue un rôle important. Par exemple, pour une section non armée si la résultante est très proche du contour de la section on observe une tendance d'augmentation vers l'infini des contraintes de compression parce que l'aire comprimée tend vers zéro. Si la résultante sort du contour alors la section ne résiste pas, si elle est non armée, *peu importe la valeur de la résultante axiale*. Ainsi, la valeur de la charge axiale n'est pas nécessairement importante quand l'excentricité le devient. Afin de traiter ces cas (charge axiale dominante, excentricité dominante etc.), on génère plusieurs diagrammes (on traite ici seulement le critère "contrainte maximale", la généralisation pour d'autres critères limites étant directe). D'abord, pour étudier l'influence de la charge axiale, on construit le diagramme *PMMa* pour la contrainte ayant sa valeur maximale permise (e.g., $0.5 \cdot f'_c$). Ensuite, on réduit à l'échelle ce premier diagramme "maximal" pour diverses valeurs des contraintes et on note les points PMM qui sortent des diagrammes (la réduction des diagrammes est pratiquement instantanée avec les algorithmes du chapitre 3). Par exemple, on emploie une valeur de ~ 1 MPa comme contrainte limite et on vérifie s'il y a des points sortant du diagramme; s'il y en a, on augmente la contrainte limite ou on étudie l'influence de l'excentricité. Ensuite, on applique un "zoom" sur le diagramme *PMMa* maximal dans sa partie inférieure (P très petit) et on vérifie les points PMM. L'appartenance d'un point PMM à un diagramme peut être vérifiée avec des algorithmes géométriques (O'Rourke 1998). Les deux étapes ci-dessus de vérification sont importantes pour les combinaisons des charges spécifiques aux SH. La modification à l'échelle du diagramme maximal (charge axiale importante et SP réduites) serait plus appropriée pour les combinaisons normales et inhabituelles tandis que le "zoom" (grande excentricité et SP grandes) sur ce diagramme serait plus adéquat pour celles extrêmes et inhabituelles.

6.3 Règles pour la génération des diagrammes PMM avec le critère d'aire fissurée

L'exemple de validation (b) du chapitre 3 a présenté brièvement les règles pour la construction de *PMMk* étant des diagrammes PMM qui incorporent le critère d'aire fissurée maximale. On a mentionné qu'au long

d'une droite qui commence dans l'origine de l'espace PMM, l'aire fissurée et la position de l'AN sont constantes. Ainsi, le diagramme $PMMk$ est obtenu comme l'intersection entre (a) le diagramme tracé pour un critère quelconque est (b) le fascicule de droites correspondant à l'aire fissurée désirée.

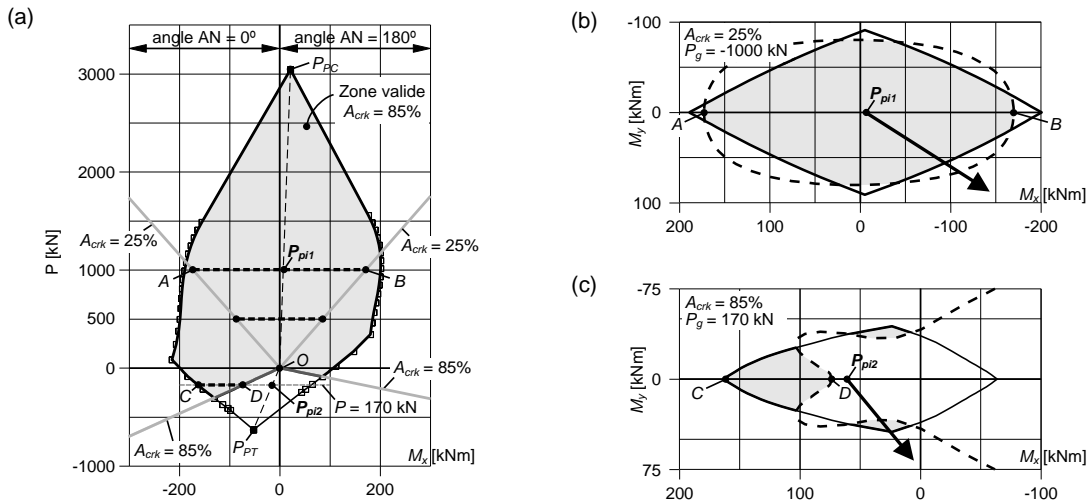


Fig. 6.3 Considération du critère d'aire fissurée : (a) courbe PMM; contour MM pour une charge axiale de compression (b) et de tension (c)

La Fig. 6.3 montre l'explication pour les règles du chapitre 3 : la partie valide du diagramme source PMM (qui forme $PMMk$) se trouve au-dessus des droites tracées pour l'aire fissurée donnée. Exemple (Fig. 6.3) : pour une aire fissurée égale à 25% les points valides, correspondant à une charge axiale de 1000 kN, appartient au segment AB ; ce segment, qui se situe *entre* les deux droites $A_{crk} = 25\%$, se rétrécit pour des charges axiales plus petites (e.g., pour $P = 500$ kN) et devient un point pour $P \leq 0$. Toutefois, si le critère est une aire fissurée de 85% et la charge axiale est en tension, la règle que "les points valides se trouvent au-dessus des droites tracées pour 85%" reste encore valide mais les points ne se situent plus *entre* ces droites; pour cette situation les segments sont entre la droite $A_{crk} = 85\%$ et le diagramme PMM source [segment CD , Fig. 6.3(a)].

Ainsi, les règles pour générer $PMMk$ diffèrent pour la charge axiale de compression et tension : (a) pour la compression, les points valides sont ceux les plus proches de l'origine P_{pi} lorsqu'on se déplace de l'origine vers l'extérieur dans la direction de la flèche, Fig. 6.3(b) (ces points sont en même temps à l'intérieur du diagramme PMM et du fascicule de droites); (b) pour la tension, les points valides sont ceux retrouvés après les fascicules de droites et avant PMM, lorsqu'on se déplace de l'origine vers l'extérieur dans la direction de la flèche, Fig. 6.3(c) (ces points sont en même temps à l'intérieur du diagramme PMM mais à l'extérieur du fascicule de droites).

6.4 Effet de la torsion gauche pour les piliers d'évacuateurs de crues

La réponse à la sollicitation de torsion d'une section est décomposée en deux parties : (i) la réponse à la torsion uniforme (ou Saint-Venant); (ii) la réponse à la torsion non uniforme (ou torsion gauche). La contribution de chaque type de torsion dans la réponse totale est variable dépendant surtout d'un facteur de forme souvent nommé $\chi = L \sqrt{\frac{GJ}{EC_w}} = L \sqrt{\frac{1}{2(1+\nu)}} \cdot \frac{J}{C_w}$ avec E , G , ν le module d'élasticité, celui de cisaillement, le coefficient du Poisson, J la constante de torsion, C_w la constante de gauchissement et L la longueur de la barre. Pour la *section rectangulaire* des relations analytiques sont développées avec la fonction de contrainte ϕ (Timoshenko et Goodier 1970)

$$\phi(x, y) = \frac{8a^3}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \left(1 - \cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) \right) / \cosh\frac{n\pi b}{2a} \cos\frac{n\pi x}{a} \quad (6.1)$$

ou celle de gauchissement ψ :

$$\psi(x, y) = xy - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3} \cdot \sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right) / \cosh\frac{n\pi b}{2a} \cdot \sin\frac{n\pi x}{a} \quad (6.2)$$

La section typique d'un pilier d'évacuateur de crues peut être assimilée à la section rectangulaire (Bourgeois 1999). À l'aide de la définition des constantes $J = \int_A \left(x \frac{\partial \psi}{\partial y} - y \frac{\partial \psi}{\partial x} + x^2 + y^2 \right) dA$ et

$C_w = \int_A \psi^2 dA$ on montre que $J = \beta \cdot a^3 b$ et $C_w = \delta \cdot a^3 b^3$ avec :

$$\beta = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{192}{\pi^5} \cdot \frac{a}{b} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^5} \tanh\frac{n\pi b}{2a} \right) \quad (6.3)$$

$$\delta = \frac{1}{144} \left(1 - \frac{144}{30} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2 + \frac{9216}{\pi^7} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^3 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^7} \left(\frac{3}{2} \tanh\frac{n\pi b}{2a} - \frac{n\pi b}{4a \cdot \cosh^2\left(\frac{n\pi b}{2a}\right)} \right) \right) \quad (6.4)$$

$$\chi = \frac{L}{b} \sqrt{\frac{1}{2(1+\nu)}} \cdot \frac{\beta}{\delta} \quad (\beta \text{ et } \delta \text{ sont des fonctions de } b/a) \quad (6.5)$$

Tableau 6.3 Valeurs des coefficients β et δ pour le calcul des constantes J et C_w

b/a	1	1.5	2	2.5	3	4	6	8	10	∞
$\beta (J)$	0.140577	0.195761	0.228682	0.249365	0.263317	0.280813	0.298320	0.307073	0.312325	1/3
$\delta (C_w)$	0.000134	0.001123	0.002540	0.003641	0.004418	0.005358	0.006166	0.006486	0.006643	1/144
β/δ	1045.94	174.31	90.02	68.50	59.60	52.41	48.38	47.35	47.02	48

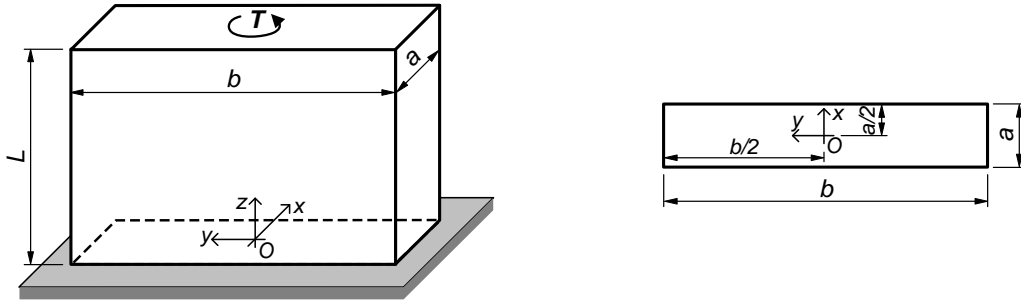


Fig. 6.4 Définition des variables pour la section rectangulaire soumise à la torsion

Le coefficient de Poisson pour les piliers d'évacuateurs de crues pourrait être pris 0.2 (béton); le rapport entre les deux cotés de la section d'un pilier b/a est habituellement plus grand que 3 ce qui donne un rapport moyen de $\beta/\delta \approx 53$. De plus, lorsque χ augmente l'influence de la torsion gauche augmente aussi. En substituant, ces constantes dans (6.5) on arrive à la condition :

$$\frac{L}{b} > \frac{\chi}{4.7} \quad (6.6)$$

que le rapport L/b doit respecter pour avoir un effet réduit de la torsion gauche. Avec la solution connue de la rotation d'une poutre en porte-à-faux soumise à l'extrémité libre à un moment de torsion concentré T on trouve la distribution de deux moments de torsion, Saint-Venant et gauche :

$$T_{sv} = T \left(1 - \frac{\cosh(k(L-z))}{\cosh(kL)} \right) \quad \text{et} \quad T_w = T \left(\frac{\cosh(k(L-z))}{\cosh(kL)} \right); \quad k = \chi/L \quad \text{et} \quad z \text{ est mesurée à partir de}$$

l'encastrement vers l'extrémité libre. À noter que la contribution de la torsion gauche T_w à T diminue de 100% à l'encastrement à une valeur plus petite à l'extrémité libre. On pourrait représenter graphiquement la variation de T_w/T en fonction de χ (Kollbrunner et Basler 1969), Fig. 6.5.

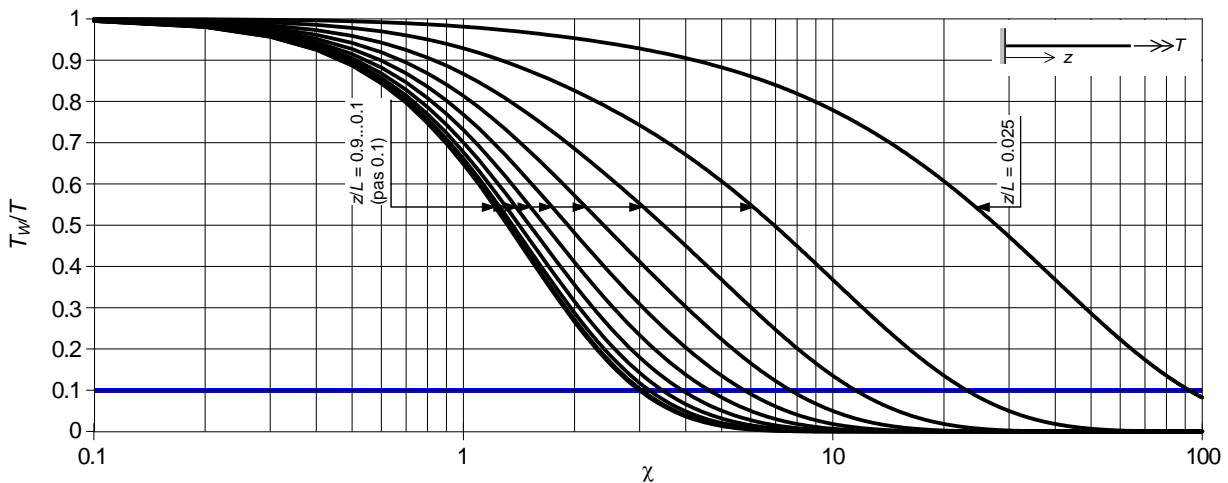


Fig. 6.5 Variation de la torsion gauche T_w en fonction du facteur de forme χ

Si une participation de $\sim 10\%$ de la torsion gauche à la torsion totale est considérée comme négligeable on construit le graphique de l'équation (6.5) pour divers rapports b/a , Fig. 6.6.

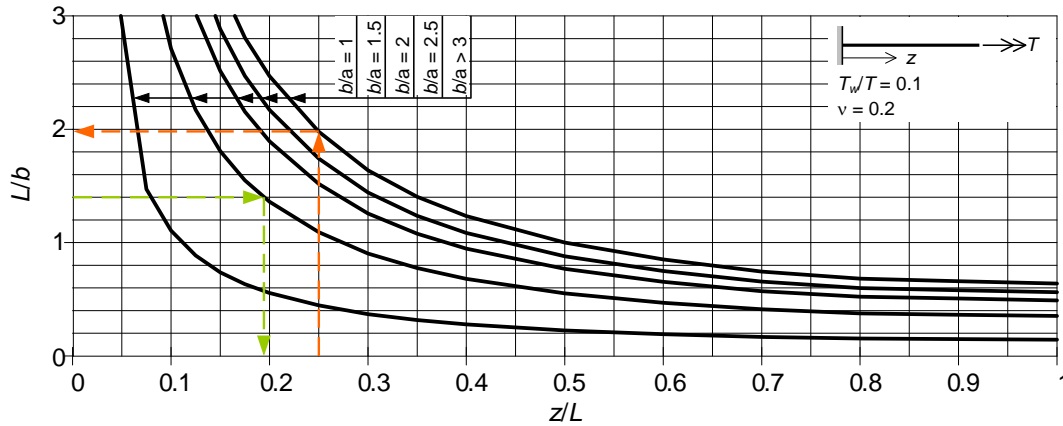


Fig. 6.6 Variation de L/b en fonction de la position z/L sur la poutre pour divers rapports b/a

À la meilleure connaissance de l'auteur, la fonction de gauchissement (6.2), le coefficient δ pour C_w (6.4) et la Fig. 6.6 représentent des contributions originales par rapport à la littérature.

La Fig. 6.6 a deux zones : (1) $z/L < 0.5$ où on voit une grande variation du L/b due à l'influence plus importante du gauchissement et (2) $z/L > 0.5$ quand les courbes se rapprochent beaucoup due à la prépondérance de la torsion Saint-Venant. Ainsi, pour $z/L > 0.5$ la condition $L > b$ satisfait le critère de torsion gauche négligeable. Comme la courbe pour $b/a > 3$ représente une moyenne des valeurs > 3 , l'erreur par rapport à la valeur *exacte* est de $\sim 6\%$. L'utilisation de ce graphique est facile. Par exemple, on a besoin du rapport L/b afin que la torsion à $z = 0.25L$ soit négligeable pour une poutre qui a un rapport $b/a = 8$: on entre sur l'abscisse du graphique avec 0.25, on lit sur le graphique qui correspond à $b/a > 3$ la valeur 1.98, Fig. 6.6. Ainsi, si $L > 2b$ on retrouve à $z = 0.25L$ une contribution de la $T_w < 10\%T$; si on fait

le calcul on obtient $\chi = \frac{2b}{b} \sqrt{\frac{1}{2(1+0.2)} \cdot \frac{0.307073}{0.006486}} = 8.883$ et $T_w = T \left(\frac{\cosh(0.75 \cdot 8.883)}{\cosh(8.883)} \right) = 0.11T$ qui est

une bonne approximation de $0.1T$. La Fig. 6.6 peut aussi être employée dans l'autre direction : on donne L/b et on voudrait savoir à partir de quelle élévation z , la torsion gauche est $< 0.1T$. Prenons le cas $b/a = 1.5$, et $L/b = 1.4$; en entrant sur l'ordonnée du graphique ayant $b/a = 1.5$ avec $L/b = 1.4$ on lit $z/L = 0.19$. Ainsi, pour $z > 0.19L$ on retrouve $T_w < 0.1T$; si on fait le calcul :

$$\chi = \frac{1.4b}{b} \sqrt{\frac{1}{2(1+0.2)} \cdot \frac{0.195761}{0.001123}} = 11.932, \quad T_w = T \left(\frac{\cosh(0.81 \cdot 11.932)}{\cosh(11.932)} \right) = 0.104T \sim 0.1T.$$

6.5 Discussion sur le centre de cisaillement et le centre de torsion

La formulation typique du problème de flexion de sections arbitraires incluant la fonction de gauchissement inclut deux parties : (1) une qui traite juste de la flexion pure ("torsionless bending") et (2) une autre qui traite juste de la torsion pure (Timoshenko et Goodier 1970, Mason et Herrmann 1968, Herrmann 1965, Sokolnikoff 1956, Love 1944). La partie flexion pure admet une distribution planaire des contraintes normales et on déduit un champ de déplacement ainsi qu'une fonction de gauchissement pour le déplacement longitudinal. On arrive à une équation de Poisson et des conditions frontières qui *dépendent* du coefficient de Poisson ν . La solution (contraintes) doit satisfaire les six conditions d'équilibre externe : trois sommes de forces (force axiale P et deux forces de cisaillement V_x , V_y) et trois sommes de moments (deux moments de flexion M_x , M_y et un moment de torsion T) sont nulles. Les équations en P , M_x , M_y sont satisfaites par la forme de la contraintes normales; les deux équations en V_x , V_y sont une conséquence de la formulation différentielle (voir chapitre 4). Cependant, le moment de torsion, produit par l'intégrale des contraintes de cisaillement en absence de sollicitation externe de torsion, n'est pas en équilibre (ce n'est pas surprenant parce que la partie torsion sera traitée dans la deuxième partie de la formulation). Pour un élément fléchi ayant une section constante, les contraintes de cisaillement sont générées seulement s'il y a au moins une force de cisaillement. Par la suite, on a conclut que la torsion est due au fait que la charge de cisaillement n'est pas appliquée au "bon" endroit qui serait le *centre de cisaillement* (CC). Il y a plusieurs définitions dans la littérature pour le CC, mais pour le but de ce paragraphe on considère pour le centre de cisaillement le point de la section où si on applique une force, la torsion sur la section est nulle. À noter que le CC vient directement d'une condition d'équilibre externe : somme de torsion nulle. Le CC, considéré comme *une propriété de la section*, a une grande importance pour la pratique : on applique V_x et V_y , on calcule la torsion avec le CC et on l'applique subséquemment dans l'analyse structurale. Comme le CC vient de la solution d'une équation différentielle qui dépend de ν le CC ne peut pas être une propriété de la section que si $\nu = 0$ (théorie classique de poutre). Lorsque la torsion est déterminée (avec l'intégrale de contraintes ou la force avec le CC) on calcule les contraintes de cisaillement dues à la torsion pure et on les ajoute à ceux dues aux forces de cisaillement.

Si on admet la torsion Saint-Venant (uniforme), le calcul se résume à la solution d'une équation de Laplace et des conditions frontières qui *ne dépendent pas* de ν . La solution est concrétisée par une autre fonction de gauchissement qui est utilisée pour calculer les contraintes et le *centre de torsion* (CT). Comme le CT ne dépend pas de ν il n'est pas généralement identique avec le CC que si $\nu = 0$ (Sapountzakis et Mokos 2005). Pour la torsion uniforme, le CT est défini souvent comme le point qui ne subit aucune translation ayant juste une rotation. Ainsi, le CT ne vient pas d'une condition d'équilibre. Les

conditions d'équilibre externe doivent aussi être satisfaites pour la torsion uniforme : P , M_x , M_y sont automatiquement satisfaites (contrainte normale nulle); V_x et V_y sont satisfaites intrinsèquement par la formulation différentielle; la torsion est respectée parce qu'on l'utilise pour le calcul de contraintes de cisaillement. On trouve plusieurs méthodes pour calculer le CT, des méthodes classiques (Gruttmann et al. 1999) jusqu'à des approches exotiques qui donnent des preuves mathématiques (critiquables) que le CT est le centroïde (Shuguang 2003). Pour la torsion uniforme, les contraintes de cisaillement ainsi que la constante de torsion J sont indépendantes du choix de l'origine de coordonnées, donc indépendantes de CT. À noter que le CT est indépendant de la présence de forces de cisaillement.

Si on considère la torsion non-uniforme la contrainte normale σ_z apparaît. Les conditions d'équilibre externe sont plus difficile à respecter. Cette fois P , M_x , M_y ne sont pas automatiquement satisfaites : la contrainte normale vient de la variation de la fonction de gauchissement sur la hauteur du pilier et pas d'une application externe de P , M_x , M_y . Pour rétablir l'équilibre, la solution qu'on a trouvé est d'utiliser les trois conditions d'équilibre pour σ_z (P , M_x , M_y) afin de corriger la fonction de gauchissement avec une fonction linéaire. Cette fonction linéaire dépend des trois constantes : deux coordonnées spatiales (les coordonnées du *centre de torsion*) et une constante d'intégration. Ainsi, pour la torsion non-uniforme le CT n'est pas généré par une condition sur les déplacements mais par la nécessité de respecter des conditions d'équilibre (pour cette raison c'est plus logique d'appeler le CT pour la torsion non-uniforme comme un CC). Le CT est indépendant de v . Les autres trois conditions V_x , V_y , T qui restent sont respectées intrinsèquement par la formulation.

Pour les sections variables soumises à la flexion pure, le chemin entre les charges et les contraintes pourrait être décrit comme, Fig. 6.7 : (i) l'analyse de flexion donne une distribution de contrainte normale σ_z *variable* sur la hauteur de la section, à cause de la variabilité de propriétés (A , I_x , I_y , centroïde, ...), même si on applique juste une charge axiale P ou un moment concentré M_x , M_y ; (ii) la variation de σ_z induit, par équilibre, des contraintes de cisaillement; (iii) l'intégrale de ces contraintes de cisaillement plus une éventuelle excentricité de V_x , V_y par rapport au *centroïde* de la section analysée provoque un torque (à noter que le torque dû à la distance entre le centroïde et le CC est contenu dans l'intégrale de contraintes); (iv) le torque est résisté avec le deux mécanismes connus : torsion Saint-Venant et non-uniforme; (v) dans un cas général un troisième mécanisme s'ajoute due à la variabilité de la section.

Par la suite, les étapes pour obtenir les contraintes de cisaillement dans une poutre fléchie sont : (i) calculer les contraintes de cisaillement avec torsion nulle; (ii) vérifier les équations d'équilibre externe : évaluer la torsion (soit par l'intégrale sur les contraintes - la plus saine, soit avec la charge de cisaillement

et le CC); (iii) appliquer la torsion sur la poutre et calculer les contraintes supplémentaires de cisaillement; (iv) vérifier les équations d'équilibre externe. Il est important d'observer que le calcul de la torsion avec le CC implique l'existence d'une force de cisaillement. Le CC est calculé symboliquement par : $CC = T/V$; mathématiquement, le CC est indéfini pour $V = 0$ même si $T \neq 0$. Ainsi, si à l'étape (iii) on jugeait la nécessité de l'analyse de torsion par la présence d'une force de cisaillement on arriverait à la conclusion erronée que la torsion est nulle lorsque la force de cisaillement est nulle. C'est pour cette raison qu'il est plus sain d'utiliser la définition avec l'intégrale des contraintes pour calculer la torsion et *pas* $V \cdot CC$.

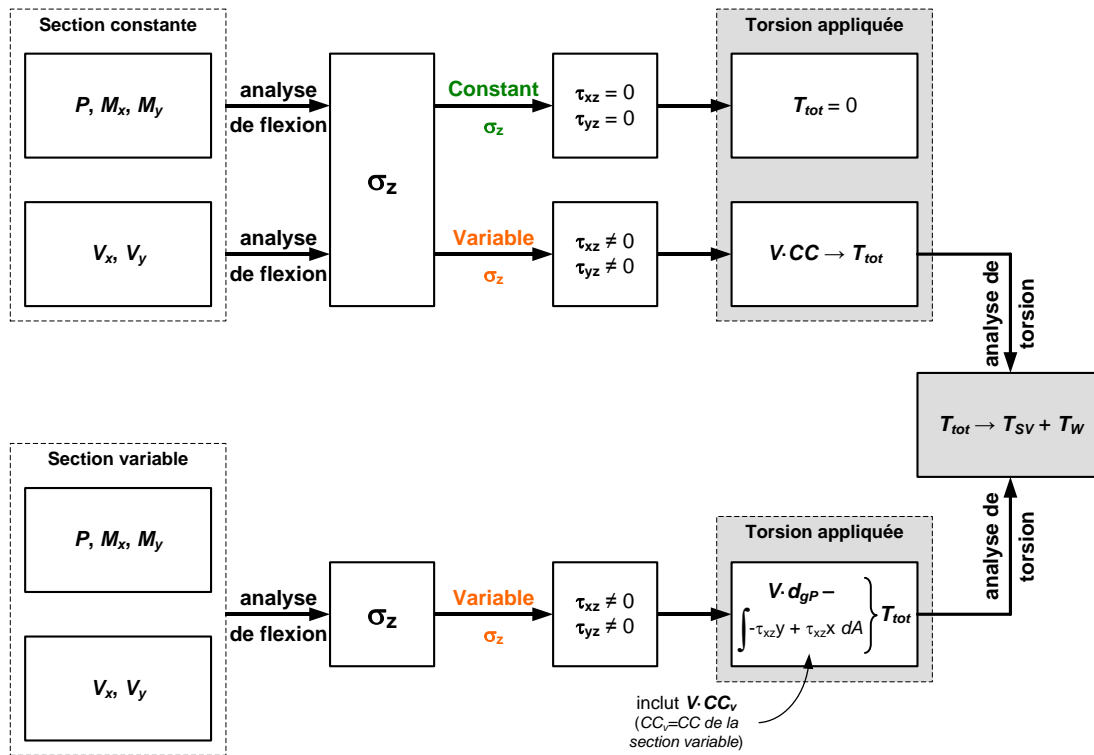


Fig. 6.7 Mécanismes pour produire et résister la torsion pour les sections constantes et variables (d_{gp} = distance entre le centroïde de la section où V est appliquée et celui de la section analysée)

Deux questions peuvent se poser pour valider si les approches mentionnées ci-dessus sont justes.

(*Question #1*) Est-ce qu'il est possible d'avoir des contraintes de cisaillement dans une poutre fléchie lorsque les forces de cisaillement et la torsion *appliquées* sont nulles ($V_x = V_y = T = 0$)? Cette question met en discussion le concept "physique" du centre de cisaillement comme une distance géométrique. Prenons l'exemple d'un élément à section variable soumise à une charge axiale. La contrainte normale σ est simplement P/A mais comme A varie σ varie aussi; cette variation produit, par équilibre, des contraintes de cisaillement. Le moment de torsion de ces contraintes de cisaillement T_{ae} n'est pas obligatoirement nul parce qu'il dépend de la variation 3D de la section et pas seulement de la section analysée. Si T_{ae} n'est pas

nul *il faut* effectuer une analyse de torsion contrairement à la logique du CC qui pour $V_x = V_y = 0$ admet $T = 0$. Ce torque T_{ae} est auto-équilibré par la section parce que la torsion externe appliquée est nulle.

(*Question #2*) Est-ce qu'on peut rencontrer la situation où, due à notre formulation, en direction où on n'a pas appliqué des charges on obtient des résultantes non-équilibrées (autrement dit, si par exemple après l'analyse de torsion non uniforme on obtient une charge axiale comme l'intégrale des contraintes normales de gauchissement)? Cette question montre que la vérification de l'équilibre est importante peu importe la position ou l'existence du CC/CT et la sollicitation; l'équilibre ne doit pas être considéré comme satisfait implicitement. En théorie, toute application d'une charge peut produire une charge non-équilibrée dans une autre direction (e.g., dans une certaine formulation un torque pourrait générer une charge axiale non-équilibrée). C'est le cas de (a) l'apparition d'une torsion pour une poutre en flexion pure, d'où la notion de CC et (b) l'apparition d'une force de cisaillement pour la torsion non-uniforme des éléments à section variable. À noter, que par "non-équilibrées" on comprend des charges que la *formulation* n'a pas équilibrée et pas la section réelle. La section réelle trouve toujours une manière pour équilibrer ces charges; c'est à nous de trouver une formulation rationnelle pour les équilibrer. À la meilleure connaissance de l'auteur une *solution* générale pour rétablir équilibre n'existe pas, une fois qu'une charge non-équilibrée apparaît. Des recommandations existent : (a) forcer l'équilibre avec des artifices mathématique au niveau de la formulation analytique (e.g., l'ajout d'une fonction linéaire à la fonction de gauchissement pour la torsion non-uniforme afin d'assurer l'équilibre en P, M_x, M_y); (b) réappliquer la charge non-équilibrée sur la section (e.g., l'application de la torsion due à la différence entre le centroïde et le CC). La dernière solution (b) assume que la réapplication ne produit pas à son tour des charges non-équilibrées si non on serait dans une boucle itérative sans fin (cercle). Pour des sections constantes, il y a des formulations classiques, qui ne produisent pas des charges non-équilibrées, pour toutes les sollicitations P, M_x, M_y, V_x, V_y, T . Ainsi, si notre formulation produit des charges non-équilibrées, une solution qu'on recommande est d'utiliser les formulations classiques pour s'en débarrasser. Par exemple : (a) notre formulation pour la torsion non-uniforme des sections variables produit une charge de cisaillement V_{ne} ; (b) réappliquer V_{ne} sur une section considérée constante avec la formulation classique; (c) cette application peut produire à son tour une torsion T_{ne} si $CC \neq$ centroïde; (d) réappliquer la formulation classique de torsion pour T_{ne} sur une section considérée constante; (e) l'équilibre est satisfait et le cercle itératif est brisé (section 6.7).

À la lumière des commentaires ci-dessus et de deux questions on observe que :

- Pour le problème d'analyse classique d'une poutre ($v = 0$, section constante) le centre de cisaillement (CC) est identique avec celui de la torsion (CT) et généralement différent du centroïde. Il peut être calculé soit avec la formulation du problème de cisaillement soit avec la

formulation du problème de torsion. Il est une propriété de la section et la torsion induite peut être calculée symboliquement comme : $T = V \cdot CC$, en évitant le calcul intégral. La torsion est produite seulement s'il y a au moins une charge de cisaillement ou un torque appliquées. Après le calcul de la torsion toutes les équations d'équilibre sont satisfaites.

- Pour tous les autres problèmes (sections variables, calcul plastique, ...) l'évaluation de la torsion avec l'intégrale des contraintes de cisaillement est fortement recommandable. Le CC et le CT ne sont pas nécessairement bien définis ou identiques et aucun n'est une propriété de la section. La torsion pourrait exister même si les forces de cisaillement et le torque appliquées sont nulles. Il est impératif de vérifier les six équations d'équilibre (analytiquement, numériquement) et de trouver une solution pour rétablir l'équilibre le cas échéant.

6.6 Évaluation apriori des résultantes pour cisaillement pur des sections variables

Les dérivées des propriétés géométriques pour la formulation de cisaillement pur sont calculées numériquement (chapitres 4, 5). La qualité de ces dérivées peut être appréciée avec les équations d'équilibre *après* l'analyse FE quand d'un point de vue optimisation il est trop tard. De plus, si l'élément est fissuré la hauteur virtuelle de la fissure (section 5.5.2) doit être approximée, mais aussi la qualité de cette approximation est évidente seulement *après* l'analyse FE. Afin d'évaluer *apriori* si les résultantes des contraintes suite à l'analyse FE auront une précision numériquement adéquate on montre que les intégrales de contraintes sont indépendantes de la solution FE étant (pour notations voir chapitre 5) :

$$V_x = (1 + \nu) \left(f_{fx} I_y + f_{fy} I_{xy} \right) - \int_{\Gamma} x \sigma_{zB} n_z ds; \quad V_y = (1 + \nu) \left(f_{fx} I_{xy} + f_{fy} I_x \right) - \int_{\Gamma} y \sigma_{zB} n_z ds \quad (6.7)$$

Bien que le modèle FE puisse introduire des imprécisions à cause de sa formulation intrinsèque les relations (6.7) sont fortement utiles au début de l'analyse FE afin d'évaluer de manière apriorique la qualité des fonctions f_{ij} (5.7). On montre que les intégrales linéaires (en ds) dans (6.7) se transforment dans des sommes sur chaque segment linéaire du contour $[(x_i, y_i); (x_{i+1}, y_{i+1})]$ de la section :

$$\int_{\Gamma} x \sigma_{zB} n_z ds = \sum_{i=1}^n \left[n_{zi} \left(\sigma_{0z} J_{xi} + \sigma_{1z} J_{xci} + \sigma_{2z} J_{xyi} \right) \right]; \quad \int_{\Gamma} y \sigma_{zB} n_z ds = \sum_{i=1}^n \left[n_{zi} \left(\sigma_{0z} J_{yi} + \sigma_{1z} J_{xyi} + \sigma_{2z} J_{yyi} \right) \right] \quad (6.8)$$

$$J_{xi} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}; \quad J_{xci} = \frac{x_i^2 + x_i x_{i+1} + x_{i+1}^2}{3}; \quad J_{xyi} = \frac{2(x_i y_i + x_{i+1} y_{i+1}) + x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i}{6} \quad (6.9)$$

où n =nombre de segments du contour. Pour J_{yi} , J_{yyi} on change en correspondance les indices en (6.9).

6.7 Formulation suggérée pour torsion non uniforme des éléments à section variable

La formulation pour la torsion non uniforme typiquement trouvée dans la littérature (chapitres 4 et 5) a un caractère approximatif pour sections variables étant une adaptation de la théorie des poutres à parois minces. Une formulation plus appropriée devrait tenir compte de la variation 3D de la fonction de

gauchissement principale ainsi que des conditions limites correspondantes. La partie de torsion SV demeure inchangée, mais la contrainte normale de gauchissement et sa dérivée ont une forme différente :

$$\sigma_{zw} = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \varphi(x, y, z) \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{zw}}{\partial z} = E \frac{d^3\theta}{dz^3} \varphi + E \frac{d^2\theta}{dz^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (6.10)$$

En insérant (6.10) dans les équations d'équilibre et de conditions limites (5.5) on déduit la forme forte :

$$\begin{cases} -\nabla^2 \varphi_s = \left(2(1+\nu) \left(\frac{d^3\theta}{dz^3} \cdot \varphi + \frac{d^2\theta}{dz^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \right) \Big|_{z=0} \\ \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} = \left(-2(1+\nu) \frac{d^2\theta}{dz^2} \varphi \cdot n_z \right) \Big|_{z=0} \end{cases} \quad (6.11)$$

La fonction de gauchissement φ_s est fictive étant introduites juste pour des raisons mathématiques afin de forcer l'équilibre interne (Sapountzakis et Mokos 2004b). Pourtant, l'équilibre externe doit être satisfait.

6.7.1 Vérification de l'équilibre externe

L'équilibre pour la force axiale et les moments fléchissants est satisfait de la même manière que pour les sections constantes (A.11) - (A.13), annexe A.5.2. En suivant la procédure présentée au chapitre 5 (5.16), (5.17), l'annexe A.5.2 et de propriétés de la fonction de gauchissement on montre que (φ à toute élévation est évaluée par rapport au centre de cisaillement de la section analysée, $z = 0$) :

$$V_x = \int_{A(z)} \tau_{xz} dA \Big|_{z=0} = \int_A \tau_{xz} + x \underbrace{\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ (eq. d'équilibre)}} dA = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \frac{d}{dz} \int_A \varphi \cdot x dA \neq 0 \quad (6.12)$$

$$V_y = \int_{A(z)} \tau_{yz} dA \Big|_{z=0} = \int_A \tau_{yz} + y \underbrace{\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right)}_{=0 \text{ (eq. d'équilibre)}} dA = E \frac{d^2\theta}{dz^2} \cdot \frac{d}{dz} \int_A \varphi \cdot y dA \neq 0 \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} T_W = \int_{A(z)} (-\tau_{xzW} y + \tau_{yzW} x) dA \Big|_{z=0} &= G \int_A \varphi \cdot \nabla^2 \varphi_s dA - G \int_{\Gamma} \varphi \frac{\partial \varphi_s}{\partial n} ds = -E \frac{d^3\theta}{dz^3} \int_A \varphi^2 dA - \frac{E}{2} \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_A \frac{\partial(\varphi^2)}{\partial z} dA \dots \\ &\dots + E \frac{d^2\theta}{dz^2} \int_{\Gamma} \varphi^2 n_z ds = -EC_w \frac{d^3\theta}{dz^3} - E \frac{d^2\theta}{dz^2} \underbrace{\left(\frac{1}{2} \left(\frac{dC_w}{dz} - \int_{\Gamma} \varphi^2 n_z ds \right) \right)}_{C_{wv}} = -EC_w \frac{d^3\theta}{dz^3} - EC_{wv} \frac{d^2\theta}{dz^2} \end{aligned} \quad (6.14)$$

Par la suite l'équation de l'angle de rotation devient :

$$\underbrace{GJ \frac{d\theta}{dz}}_{T_{SV}} \underbrace{- EC_w \frac{d^3\theta}{dz^3} - EC_{wv} \frac{d^2\theta}{dz^2}}_{T_W} = T_{tot} \Rightarrow T_{SV} + T_W = T_{tot} \quad (6.15)$$

Les forces de cisaillement nécessitent un traitement adéquat (section 6.5). Cette formulation pourrait être plus appropriée que (5.21), (5.24) parce qu'elle respecte rigoureusement toutes les équations d'équilibre.

CHAPITRE 7

DISCUSSION GÉNÉRALE

L'objectif principal de ce projet est de développer une stratégie d'analyse qui étant accessible aux ingénieurs praticiens englobe des détails sophistiqués du comportement structural des piliers d'évacuateur de crues (e.g., cisaillement et torsion des sections arbitraires variables). L'idée de cette stratégie est de proposer un modèle de calcul qui "contourne" l'analyse avec les EF 3D en la transformant dans une série d'analyses sectionnelles avec des EF 2D; il s'agit de la philosophie classique de la théorie des poutres. Afin d'y arriver le modèle doit tenir compte des équations de compatibilité, d'équilibre et de la distribution 3D des charges (surtout pour le cisaillement et la torsion). Cette approche a plusieurs avantages : (a) elle évite les complications directement reliées à l'analyse hydromécanique EF 3D des structures fissurées : effort important pour l'interprétation des résultats / interprétation difficile, modélisation lourde, concentration de contraintes, difficulté de convergence une fois l'eau rentrée dans les fissures, nécessité de post-processeur; (b) elle est rapide; (c) stable même lorsque les SP sont actualisées; (d) elle est appropriée aux ingénieurs pour le design; (e) elle conduit aux FSG; (e) elle adhère à l'approche recommandée par les guides. Les désavantages le plus importants sont : (a) les difficultés à considérer des conditions limites/supports et le passage d'un matériau à l'autre (fondation); (b) les approximations pour certaines distributions de contraintes (e.g., contraintes normales linéaires pour la flexion); (c) elle modélise peu ou ne modélise pas (ou la précision n'est pas adéquate) les effets locaux.

Une grande partie de la littérature et des guides traitent des méthodes de calcul amont-aval pour les ouvrages hydrauliques même si on est conscient que ces structures sont 3D soumises aux charges 3D. La considération des effets 3D est recommandée simplement d'être faite avec une analyse EF 3D. On trouve deux directions d'analyse qui pratiquement ne "communiquent" pas l'une avec l'autre : la méthode de gravité (qui est "très" 1D) et la méthode des EF 3D (qui est "très" 3D). Comme la plupart des ouvrages existants ont été calculés avec la méthode de gravité (encore préférée par les ingénieurs) il n'y a pas besoin d'autres preuves que cette méthode ou sa philosophie est appropriée. D'autre côté, les EF 3D, malgré leurs inconvénients, forment un outil puissant pour une analyse détaillée. Pourtant, un modèle cohérent qui fait le "pont" entre les deux techniques d'analyse, en réunissant les avantages de deux, n'est pas trouvé dans la littérature. La "construction" de ce pont exprime la contribution originale de ce projet. Cette construction a impliqué une transformation de la théorie classique des poutres pour l'analyse sectionnelle d'un élément structural ayant section arbitraire, variable et fissurée soumis aux sollicitations 3D PMMVVT avec

l'influence des sous-pressions; il s'agit d'autant défis à relever. On a adopté une approche progressive en rendant graduellement plus complexe le modèle qui a été validé pour une certaine étape, Fig. 7.1. La première étape a été le développement des diagrammes d'interaction PMM en se basant sur l'algorithme non linéaire pour la fissuration oblique des ouvrages hydrauliques. En ayant les combinaisons les plus critiques et la partie fissurée de la section suite à la première étape on a ajouté dans la deuxième étape deux V et ensuite un T correspondant à V_x, V_y, T (EF 2D). Dernièrement, on a transformé le modèle pour l'analyse des sections variables et fissurées. En procédant de cette manière l'utilisateur a la possibilité de suivre étape par étape l'analyse et de faire des ajustements avant le calcul des FSG proposés par le modèle.

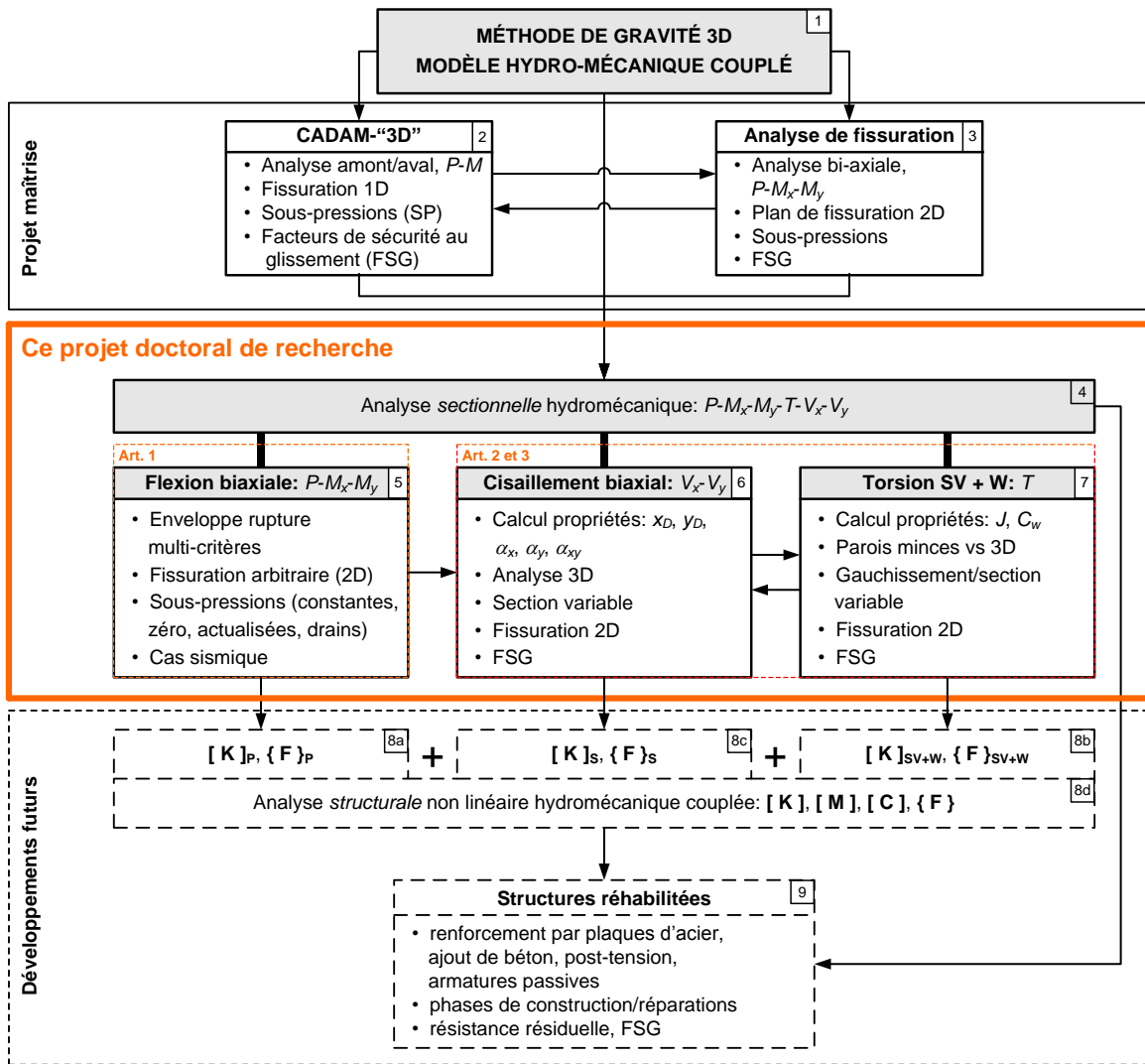


Fig. 7.1 Approche progressive de l'analyse de stabilité d'une structure hydraulique

D'autres activités complémentaires de recherche, qui ne faisant pas partie initialement du présent projet doctoral lui élargissent son domaine d'application, ont été entreprises dans le domaine d'analyse de

barrages afin de : (a) montrer l'application pratique des algorithmes proposés et leurs développements possibles; (b) obtenir des données de test et valider les résultats avec des barrages réels soumis aux charges réelles; (c) explorer des domaines connexes à l'analyse statique des barrages. Ces activités ont fait l'objet des articles/présentations soumis aux conférences (annexe B). Suite à une collaboration avec le Centre d'expertise du Québec on a développé une méthode d'analyse de fissuration et stabilité des barrages ancrés avec des ancrages passifs en se basant sur les algorithmes proposés dans la première partie du projet de doctorat. Cette méthode forme la base d'un logiciel, GM-Dam qui a été distribué dans la communauté d'ingénierie lors du Congrès annuel de l'Association canadienne des barrages (2010). Deux autres articles reliés à l'analyse de barrages armés avec des ancrages passifs sont en préparation.

Ce projet de recherche a été faisable parce qu'il a été décrit d'une manière logique et cohérente en se basant sur des arguments pertinents tirés de la littérature scientifique, sur une méthodologie appropriée et sur des exemples adéquats pour validation. Pour chaque difficulté identifiée, on a proposé une ou des solutions possibles et on a exploré des alternatives pour les cas ou des ramifications "si oui"/"si non" étaient rencontrées. Grâce à la robustesse et à la stabilité du modèle proposé il est applicable pour l'analyse des ouvrages hydrauliques et il est apte à être implémenté dans des logiciels spécialisés (e.g. CADAM-3D).

CONCLUSIONS, RECOMMANDATIONS ET PERSPECTIVES

Cette partie vise à compléter les conclusions exprimées dans les articles et non à les répéter. On insiste en particulier sur ses limitations et sur les perspectives possibles. Le lecteur est invité à relire, tout d'abord, les conclusions des chapitres 3, 4 et 5.

On trouve dans la plupart des domaines du génie civil deux catégories des méthodes d'analyse qui coexistent harmonieusement : les *méthodes simplifiées* et la méthode des éléments finis (MEF). C'est le cas de l'analyse des poutres en béton armé soumises aux sollicitations V_x - V_y par la méthode MCFT (Modified Compression Field Theory) vs la MEF; c'est, également, le cas d'analyse de flambement ou de voilement des poutres en acier avec une méthode simplifiée vs la MEF; c'est, notamment, le cas du calcul des ouvrages hydrauliques quand on utilise la méthode de gravité vs la MEF. L'originalité de ce projet est d'exploiter à fond la mécanique de milieux continus et fissurés et la théorie des poutres dans le contexte d'analyse des structures hydrauliques en tenant compte de l'effet des sous-pressions.

Ce projet traite du développement d'un modèle original d'analyse hydromécanique des piliers d'évacuateur de crues soumis aux sollicitations 3D P - M_x - M_y - V_x - V_y - T . Le modèle ayant la philosophie de la théorie des poutres et de la méthode de gravité étend leur utilisation pour des sections arbitraires, variables, trapues, fissurées soumises aux sollicitations 3D incluant le cisaillement biaxial et la torsion uniforme et non uniforme. Il s'agit de la *thèse du projet*. Trois articles décrivent en détail ce modèle et fournissent des études de cas et des exemples appropriés de validation et d'application. Un logiciel a été développé pour l'implémentation du modèle d'analyse proposé.

Le projet est d'*actualité*, premièrement, parce que son sujet suscite un vif intérêt industriel (collaborations avec l'Hydro-Québec et le Centre d'expertise hydrique du Québec). De plus, dans la littérature scientifique il y a un manque des méthodes performantes et robustes d'analyse des structures à sections variables, trapues, fissurées sous sollicitations 3D et ce manque est plus accentué si les sollicitations sont hydromécaniques. L'actualité de ce sujet a été confirmée lors de la publication de notre premier article par Journal of Structural Engineering et l'acceptation du deuxième par Computers and Structures.

En plus des conclusions présentées dans chaque article un point mériterait une attention plus particulière. L'analyse sectionnelle proposée utilise les fonctions de gauchissement pour être aussi générale que possible (sections avec des trous, sections multi-matériaux, ...). La déformation de la section est directement connue et en procédant par une technique typique d'*analyse matricielle* on pourrait construire

directement la matrice de rigidité raffinée qui tient compte des toutes les particularités d'analyse du modèle proposé. Ensuite, la barre pourrait être assemblée dans une analyse structurale statique ou modale/dynamique afin d'obtenir d'autres quantités d'intérêt : déplacements, périodes de vibrations,

Bien que le modèle puisse analyser avec une précision adéquate la plupart des éléments structuraux qu'on trouve en pratique il montre quelques limites :

- (i) la fissuration de la section est évaluée au début de l'analyse sous sollicitations $P-M_x-M_y$ en négligeant l'effet des contraintes normales de gauchissement due à la torsion non uniforme sur la partie fissurée et aussi sur l'actualisation des sous-pressions correspondant à ces effets;
- (ii) la distribution des contraintes normales est considérée linéaire même si on admet qu'il s'agit d'une approximation (sections trapues, joint de la fondation, concentration de contraintes, ...);
- (iii) la section n'est pas armée pour l'analyse VVT (elle est armée pour PMM, chapitre 3);
- (iv) la section ne peut pas être composée de parties séparées entre lesquelles il n'y a pas de lien (pour un modèle complet 3D cette situation est possible parce que l'élément est continu en haut et en bas de la section analysée);
- (v) afin d'éviter l'effet de Saint-Venant on ne peut pas se fier complètement à l'analyse sectionnelle très proche d'un appui ou d'un point d'application des charges (un modèle complet 3D pourrait être également sensible dans le voisinage des conditions limites).

Plusieurs perspectives, améliorations et approfondissements futures peuvent être envisagées :

- (i) une meilleure formulation pour la torsion non uniforme parce que celle actuellement utilisée n'est pas complètement appropriée aux sections variables étant une source d'erreur de calcul (une telle formulation a été suggérée mais pas validée dans ce projet);
- (ii) la continuation de l'analyse élastique proposée avec une analyse "plastique" pouvant intégrer de manière non linéaire itérative le critère de rupture Mohr-Coulomb;
- (iii) la considération de l'armature ainsi que des autres particularités des structures hydrauliques : phases de construction et réparation, coursier oblique, présence des vannes, ... ;
- (iv) l'inclusion dans le modèle actuel des divers extensions : (a) l'évaluation de la fissuration due aux contraintes normales de torsion non uniforme; (b) la fissuration hors plane à l'aide des contraintes normales transversales, (c) la variation longitudinale de la force axiale, ... ;
- (v) le développement d'une matrice raffinée de rigidité (et des forces nodales) qui englobe les déformations 3D fournies par le modèle actuel (des quantités "classiques" peuvent être proposées pour l'analyse structurale des éléments à section variable : des coefficients de Timoshenko et l'aire de cisaillement correspondante, "le septième" degré de liberté pour la

torsion non uniforme, ...);

- (vi) l'amélioration du logiciel, surtout son interface et l'ajout des modifications mentionnées ci-dessus, pour qu'il puisse devenir éventuellement un logiciel commercial indépendant ou une partie du logiciel spécialisé CADAM-3D.

L'élaboration d'une méthode rigoureuse basée sur la mécanique des solides et facile d'interprétation est très pertinente pour statuer sur l'état d'un ouvrage hydraulique; ensuite, les éléments finis pouvant être utilisés pour certaines applications où une analyse plus raffinée des contraintes est nécessaire (méthode encore du domaine de la recherche pour la fissuration hydromécanique 3D).

RÉFÉRENCES

Cette partie complète les références des articles. Le lecteur est invité à relire, tout d'abord, les chapitres 3, 4, et 5. Une référence mentionnée dans la thèse qui ne se trouve pas ici se trouve dans les références des chapitres 3, 4, et 5.

Ainsworth, M., and Oden, J. T. (2000). *A posteriori error estimation in finite element analysis*, John Wiley & Sons, USA.

Argyris, J. H. (1960). *Energy theorems and structural analysis; a generalized discourse with applications on energy principles of structural analysis including the effects of temperature and nonlinear stress-strain relations*, 3rd Edition, Butterworth, London, England.

Asteris, P. G., and Tzamtzis, A. D. (2003). "Nonlinear seismic response analysis of realistic gravity dam-reservoir systems." *Int. J. Nonlin. Sci. Num.*, 4(4), 329-338.

Azmi, M., and Paultre, P. (2002). "Three-dimensional analysis of concrete dams including contraction joint non-linearity." *Eng. Struct.*, 24(6), 757-771.

Bhattacharjee, S., and Léger, P. (1995). "Fracture response of gravity dams to an incremental rise of reservoir elevation." *J. Struct. Engrg.*, 121(9), 1298-1305.

Bia, C., Ille, V., and Soare, M. V. (1983). *Strength of materials and Theory of Elasticity*, Editura didactica si pedagogica, Bucarest, Romania (in Romanian).

Bonet, J. L., Romero, M. L., Miguel, P. F., and Fernandez, M. A. (2004). "A fast stress integration algorithm for reinforced concrete sections with axial loads and biaxial bending." *Comput. Struct.*, 82(3), 213-225.

Bouaanani, N. (2005). *CIV6904: Solid mechanics*, Département des génies civil, géologique et des mines, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada (in French).

Bourgeois, G. (1999). "Three-dimensional static and seismic analyses of a spillway pier." Final Project Report, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada (in French).

- Bresler, B. (1960). "Design criteria for reinforced columns under axial load and biaxial bending." *ACI J.*, 57(5), 481-490.
- Brondum-Nielsen, T. (1997). "Serviceability analysis of concrete sections under biaxial bending." *J. Struct. Eng.*, 123(1), 117-119.
- Brondum-Nielsen, T. (1987). "Serviceability limit state analysis of concrete sections with circular holes under biaxial bending." *ACI Struct. J.*, 84(4), 293-295.
- Brondum-Nielsen, T. (1986a). "Serviceability limit state analysis of cracked, partially prestressed, or reinforced concrete sections under symmetric bending." *ACI J.*, 83(4), 547-552.
- Brondum-Nielsen, T. (1986b). "Serviceability limit state analysis of cracked, polygonal concrete sections under biaxial or symmetric bending." *ACI J.*, 83(2), 209-218.
- Brondum-Nielsen, T. (1986c). "Stress analysis for cracked reinforced concrete sections under symmetric bending in the serviceability limit state." *ACI J.*, 83(3), 355-358.
- Brondum-Nielsen, T. (1984). "Serviceability limit state analysis of concrete sections under biaxial bending." *ACI J.*, 81(5), 448-455.
- Brondum-Nielsen, T. (1979). "Stress analysis of concrete sections under service load." *ACI J.*, 76(2), 195-211.
- Charalampakis, A. E., and Koumousis, V. K. (2005). "Ultimate strength analysis of arbitrary cross sections under biaxial bending and axial load by fiber model and curvilinear polygons." *Proc., 5th GRACM Congress on Computational Mechanics*, Limassol, Cyprus.
- Clough, R. W. (1983). *CE220B: Theory of structures*, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkely, USA.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E., and Witt, R. J. (2002). *Concepts and applications of finite element analysis*, 3rd Edition, Butterworth, London, England.
- Courant, R. (1937). *Differential and integral calculus*, 2nd Edition, Interscience Publishers, Inc., .

Dawkins, P. (2007a). "Change of variables." *Calculus III*, 189-197, <<http://tutorial.math.lamar.edu/downloadfile.aspx?file=B,11,N>> (Jun. 25, 2011).

Dufour, S. (2008). *MTH6207: Mathematics of the finite element method*, Département de mathématiques et de génie industriel, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada (in French).

Fortin, A., and Garon, A. (2007). *The finite elements: from theory to practice*, Département de mathématiques et de statistique, Université Laval, Canada (in French).

Foster, S. J., Marti, P., and Mojsilovic, N. (2003). "Design of reinforced concrete solids using stress analysis." *ACI Struct. J.*, 100(6), 758-764.

Gallagher, R. S. (1995). *Computer visualization : graphics techniques for scientific and engineering analysis*, CRC Press, Boca Raton, FL, USA.

Gallagher, R. H. (1975). *Finite element analysis: fundamentals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.

Hunter, P., and Pullan, A. (2008). "Chapter 3: The boundary element method." *FEM/BEM Notes*, Department of Engineering Science, University of Auckland, New Zealand, 43-73.

Ibrahimbegovic, A. (2009). *Nonlinear solid mechanics*, Springer Science, .

Izzuddin, B. A., Siyam, A. A. F. M., and Lloyd Smith, D. (2002). "An efficient beam-column formulation for 3D reinforced concrete frames." *Comput. Struct.*, 80(7-8), 659-676.

Javanmardi, F., Léger, P., and Tinawi, R. (2005). "Seismic structural stability of concrete gravity dams considering transient uplift pressure in cracks." *Eng. Struct.*, 27(4), 616-628.

Johnson, C. (1987). *Numerical solution of partial differential equations by the finite element method*, Dover Publication, Mineola, N.Y.

Katsikadelis, J. T., and Sapountzakis, E. J. (1985). "Torsion of composite bars by boundary element method." , 111(9), 1197-1210.

Kollbrunner, C. F., and Basler, K. (1969). *Torsion in structures*, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, Germany.

- Langhaar, H. L. (1962). *Energy methods in applied mechanics*, Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, USA.
- Leclerc, M., Léger, P., and Tinawi, R. (2001). *CADAM User's manual - version 1.4.3*, École Polytechnique de Montréal, <<http://www.polymtl.ca/structures/telecharg/cadam/index.php>>.
- Lombardi, G. (2007). "3-D analysis of gravity dams." *Int. J. Hydropower Dams*, 14(1), 98-102.
- Love, A. E. H. (1944). *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 4th Edition, Dover Publications, New York, USA.
- Mao, Y. Q. (2003). "Stability analysis of RCC gravity dam blocks on sloped banks in Mianhuatan hydropower station." *Proc., Fourth International Symposium: Roller Compacted Concrete Dams*, Swets & Zeitlinger, Berga et al., eds., Lisse, The Netherlands, 651-654.
- Marche, C. (2004). *Dams - Fracture flood and emergency preparedness*, Presses Internationales Polytechnique, Montréal, Canada (in French).
- Mattock, A. H., Kriz, L. B., and Hognestad, E. (1961). "Rectangular concrete stress distribution in ultimate strength design." *ACI J.*, 57(2), 875-928.
- McLean, P., Léger, P., and Tinawi, R. (2006). "Post-processing of finite element stress fields using dual kriging based methods for structural analysis of concrete dams." *Finite Elem. Anal. Des.*, 42(6), 532-546.
- Melo, C., Stefan, L., Léger, P., Pedroso, L., and Bouaanani, N. (2010). "Seismic safety of gated spillways: modeling hydrodynamic pressure on gates." *Proc., 9th U.S. National and 10th Canadian Conference on Earthquake Engineering*, Toronto, ON, Canada.
- Miron, M. S. (1997). "Three-dimensional static and seismic analyses of a spillway pier by finite element." M.Sc.A. Thesis, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada (in French).
- Neuenhofer, A., and Filippou, F. C. (1997). "Evaluation of nonlinear frame finite element models." *J. Struct. Engrg.*, 123(7), 958-966.
- O'Rourke, J. (1998). *Computational geometry in C*, Cambridge University Press, USA.

- Pisani, M. A. (2004). "Non-linear strain distributions due to temperature effects in compact cross-sections." *Eng. Struct.*, 26(10), 1349-1363.
- Pisani, M. A. (1996). "A numerical method to analyse compact cross-sections." *Comput. Struct.*, 59(6), 1063-1072.
- Plitzari, G. A. (1998). "On the influence of uplift pressure in concrete gravity dams." *Eng. Fract. Mech.*, 59(3), 253-267.
- Popovici, A., and Popescu, C. (1992). *Dams for water storage*, Editura tehnica, Bucurest, Romania (in Romanian).
- Przemieniecki, J. S. (1968). *Theory of matrix structural analysis*, McGraw Hill, USA.
- Puntel, L., Bolzon, G., and Saouma, V. E. (2006). "Fracture mechanics based model for joints under cyclic loading." *ASCE J. Eng. Mech.*, 132(11), 1151-1159.
- Reagan, S. Jr. (2002). "Constrained Torsion of Prismatic Bars." Ph.D. Thesis, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of Virginia, USA.
- Reich, V., Cervenka, J., and Saouma, V. E. (1997). *MERLIN, A three-dimensional finite element program based on a mixed-iterative solution strategy for problems in elasticity, plasticity, and linear and nonlinear fracture mechanics*, Technical report, EPRI, Palo Alto, CA, USA, <<http://ceae.colorado.edu/~saouma/>>.
- Sapountzakis, E. J., and Mokos, V. G. (2004a). "3-D Beam element of variable composite cross section including warping effect." *Acta Mech.*, 171(3-4), 151-169.
- Sapountzakis, E. J., and Mokos, V. G. (2004b). "Nonuniform torsion of composite bars of variable thickness by BEM." *Int. J. Solids Struct.*, 41(7), 1753-1771.
- Sapountzakis, E. J., and Mokos, V. G. (2003). "Warping shear stresses in nonuniform torsion by BEM." *Comput. Mech.*, 30(2), 131-142.
- Shames, I. H., and Dym, C. L. (2009). *Energy and finite element methods in structural mechanics*, Taylor & Francis, New York, USA.

Shuguang, L. (2003). "The centre of twist for a prismatic bar under free torsion." *Int. J. Mech. Eng. Educ.*, 31(3), 226-232.

Sokolnikoff, I. S. (1956). *Mathematical theory of elasciticy*, McGraw Hill, USA (in French).

Sokolnikoff, I. S., and Sokolnikoff, E. S. (1941). *Higher mathematics for engineers and physicists*, 2nd Edition, McGraw Hill, USA.

Sousa Jr., J. B. M., and Muniz, C. F. D. G. (2007). "Analytical integration of cross section properties for numerical analysis of reinforced concrete, steel and composite frames." *Eng. Struct.*, 29(4), 618-625.

Spacone, E., Filippou, F. C., and Taucer, F. F. (1996). "Fiber beam-column model for nonlinear analysis of R/C frames. I: Formulation." *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 25(7), 711-725.

Stefan, L., and Léger, P. (2010). "Cracked section analysis of gravity dams including passive reinforcement and uplift pressures." *Proc., CDA 2010 Annual Conference*, Canadian Dam Association, Niagara Falls, ON, Canada.

Stefan, L., Limoges, A., and Léger, P. (2008). "Three-dimensional seismic stability evaluation of spillway structures considering concrete cracking." *Proc., CDA 2008 Annual Conference*, Canadian Dam Association, Winnipeg, MB, Canada.

Stefan, L. (2007). "Extension of the gravity method for cracking analysis of spillway piers including uplift pressures." M.Sc.A. Thesis, École Polytechnique de Montréal, Montréal, Canada (in French).

Taylor, R. L. (2003). *FEAP - A finite element analysis program*, Department of Civil and Environmental Engineering, University of California at Berkeley, <<http://www.ce.berkeley.edu/projects/feap/>>.

Thanoon, W. A., Hamed, A. M. M., Noorzaei, J., Jaafar, M. S., and Al-Silayvani, B. J. (2004). "Inelastic analysis of composite sections." *Comput. Struct.*, 82(20-21), 1649-1656.

U.S. Army Corps of Engineers Waterways Experiment Station ADP Center (USACE-WES). (1982). "Report 3 - General analysis module (CGAM)." *A three-dimensional stability analysis/design program (3DSAD)*, Vicksburg, MS, 31-51.

U.S. Army Corps of Engineers (USACE). (2003). *Engineering and design: Time-history dynamic analysis of concrete hydraulic structures - Rep. EM 1110-2-6051*, Washington, D.C.

Wang, C.-K., and Salmon, C. G. (1965). *Reinforced concrete design*, International Textbook Co., USA.

Watermeyer, C. F. (2006). "A review of the classical method of design of medium height gravity dams and aspects of base shortening with uplift." *J. S. Afr. Inst. Civ. Eng.*, 48(3), 2-11.

Wilson, E. L. (2002). *Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of structures*, 3rd Edition, Computers and Structures, Berkeley, USA.

Zupan, D., and Saje, M. (2005). "Analytical integration of stress field and tangent material moduli over concrete cross-sections." *Comput. Struct.*, 83(28-30), 2368-2380.

ANNEXE A

DÉMONSTRATIONS DES FORMULES DES ARTICLES

A.1 Relation entre l'angle α et l'angle θ

L'angle α est défini comme l'angle du moment résultant et θ comme angle de l'axe neutre (AN) par rapport à l'axe Ox , [Fig. 1.1(b)]. La démonstration est basée sur l'équation de la distribution σ_z (3.1) reprise ici :

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot y - \frac{M_y I_x + M_x I_{xy}}{I_x I_y + I_{xy}^2} \cdot x \quad (\text{A.1})$$

L'angle θ est l'angle de la droite qui est obtenue par l'intersection entre le plan ci-dessus (A.1) et le plan horizontal $\sigma_z = 0$. L'équation (A.1) ayant la forme classique de l'équation d'un plan ($ax + by + cz + d = 0$), le terme libre P/A n'influence pas l'angle θ , il fait juste une translation parallèle du plan; dans (A.1) σ_z a le rôle de z et $c = -1$. Ainsi, comme par définition $\tan \theta = -a/b$ et $\tan \alpha = M_y/M_x = -e_x/e_y$, on déduit :

$$\tan \theta = \frac{M_y I_x + M_x I_{xy}}{M_x I_y + M_y I_{xy}} = \frac{\frac{M_y}{M_x} I_x + I_{xy}}{I_y + \frac{M_y}{M_x} I_{xy}} = \frac{\tan \alpha \cdot I_x + I_{xy}}{I_y + \tan \alpha \cdot I_{xy}} \quad (\text{A.2})$$

On observe que si l'aire de la section n'est pas nulle, l'angle θ est toujours bien défini (le terme $I_y + \tan \alpha \cdot I_{xy}$ étant toujours non nul). L'équation (A.2) reste valable même quand la section est fissurée, mais il faut y remplacer les propriétés de la section complète avec celles de la section non fissurée; c'est pour cette raison que la recherche géométrique de l'AN fonctionne.

A.2 L'équation de l'AN pour la recherche géométrique

La recherche géométrique de l'AN (présentée dans le chapitre 3) est avantageuse parce qu'elle utilise des approches *géométriques* typiques de recherche d'une droite qui respectent une condition dans un espace donné. La recherche est très "visuelle" : on cherche la position d'une droite qui respecte certains angles et distances par rapport à un repère. Par la suite, l'implémentation de l'algorithme dans un chiffrier est plus facile. La démonstration des équations est basée sur l'équation (A.1) et sur les notations : $e_x = -M_y/P$, $e_y = M_x/P$. L'équation de l'AN est obtenue de (A.1) en imposant $\sigma_z = 0$. Ensuite, en multipliant (A.1) par A/P il résulte :

$$0 = 1 + \frac{A}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left(\frac{M_x}{P} I_y + \frac{M_y}{P} I_{xy} \right) \cdot y - \frac{A}{I_x I_y - I_{xy}^2} \left(\frac{M_y}{P} I_x + \frac{M_x}{P} I_{xy} \right) \cdot x \quad (\text{A.3a})$$

$$1 + \frac{A}{I_x I_y - I_{xy}^2} (e_y I_y - e_x I_{xy}) \cdot y - \frac{A}{I_x I_y - I_{xy}^2} (-e_x I_x + e_y I_{xy}) \cdot x = 0 \quad (\text{A.3})$$

qui représente l'éq. (3.3) si (A.3) est comparée avec la forme d'une droite : $ax + by + c = 0$. Il est important d'observer que, bien que les eqs. (A.2) et (A.3) soient dérivées de (A.1), elles représentent deux quantités indépendantes : l'angle de l'AN et l'intersection de la droite avec l'axe Oy [variables θ et d , Fig. 1.1(b)], définissant ainsi complètement l'AN. D'ailleurs, (A.2) et (A.3) peuvent être utilisées comme paramètres de contrôle de la convergence. Si le moment fléchissant résultant M est nul (e.g., compression pure) la distance entre le centroïde de la section et l'AN est pratiquement infinie; si la charge axiale P est nulle (e.g., flexion pure) cette distance est nulle (le centroïde se trouve sur l'AN); finalement, si P et M ne sont pas mutuellement nuls la distance est entre zéro et l'infini. Ainsi, on pourrait voir l'équation (A.2) comme la condition géométrique de "l'angle" que l'AN doit satisfaire et l'équation (A.3) comme la condition géométrique de "distance". On recommande d'itérer premièrement sur l'angle et après sur la distance. La droite qu'on suppose l'AN coupe la section et permet le calcul des propriétés de la section qui à leur tour génèrent une autre droite : (A.3); si P est nul l'équation (A.3) est remplacée par la condition "distance = 0" (l'AN passe alors par le centroïde). La droite supposée représente la position finale de l'AN (A.3) si deux conditions sont satisfaites : (a) l'angle de la droite supposée et celui de l'AN calculé sont "égaux"; et (b) la distance entre le centroïde calculé et la droite supposée est "égale" à la distance entre ce centroïde et l'AN calculée. L'équation de la distance entre le centroïde et une droite typique ($ax + by + c$) est : $(a \cdot x_g + b \cdot y_g + c)/(a^2 + b^2)^{1/2}$.

Cet algorithme géométrique n'impose aucune limitation sur la forme de la section (le contour est arbitraire avec plusieurs trous), sur les armatures (la section est non armée, armée et/ou précontrainte et les armatures ne sont pas ponctiformes) ou sur les charges (toutes combinaisons $P-M_x-M_y$). Les capacités de cet algorithme peuvent être étendues pour considérer la présence des SP et la résistance limitée à la traction du béton (f'_t). Pour $f'_t \neq 0$ la droite qui coupe la section, étant utilisée pour le calcul des propriétés de la section, est décrite par l'éq. (A.3) plus le terme $-f'_t \cdot A/P$. Dans le cas où l'on considère les SP la seule modification est que les excentricités (e_x, e_y) ne sont plus constantes mais en fonction de la droite (A.3) et aussi des SP.

A.3 Intégration d'une distribution planaire de contraintes σ sur une section arbitraire

La distribution des contraintes normales (A.1) a la forme classique d'un plan, comme mentionné ci-dessus : $ax + by + cz + d = 0$, avec $c = -1$ et z représentant σ_z . Ce plan est produit par les charges PMM appliquées : si on a les charges et les propriétés de la section, on les remplace dans (A.1) et on identifie les paramètres du plan : a, b et d . Le calcul des diagrammes PMM nécessite souvent le contraire : on a l'équation du plan (a, b, c, d) et on a besoin des charges PMM qui ont produit ce plan σ . En procédant par identification dans (A.1) et l'équation du plan on déduit :

$$d = \frac{P}{A}; \quad b = \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2}; \quad a = -\frac{M_y I_x + M_x I_{xy}}{I_x I_y + I_{xy}^2} \quad (\text{A.4})$$

Ce système d'équations donne les équations recherchées :

$$P = d \cdot A; \quad M_x = b \cdot I_x + a \cdot I_{xy}; \quad M_y = -a \cdot I_y - b \cdot I_{xy} \quad (\text{A.5})$$

La distribution de la déformation ε est un plan dans l'espace (x, y, ε) défini uniquement par trois points distincts. Ces trois points sont calculés en général à partir de : (1) l'angle de l'AN, l'intersection de l'AN avec les axes et la déformation en un point $(\theta, d, \text{et } \varepsilon_e)$; ou (2) l'angle de l'AN, la déformation due à la charge axiale au centroïde et la courbure $(\theta, \varepsilon_o, \text{et } \psi)$. Afin de définir le plan des contraintes σ , on multiplie la coordonnée ε du plan de déformation par le module d'élasticité de référence de la section. Ensuite, on introduit les trois points, avec la coordonnée ε multipliée, dans l'équation classique d'un plan qui passe par trois points, puis on forme le plan de contraintes normales σ que l'on peut intégrer.

A.3.1 Cas $\theta, d, \text{et } \varepsilon_e$

La position de l'AN est spécifiée directement $(\theta \text{ et } d)$ et la déformation, ε_e , est donnée pour un point (x_e, y_e) à l'extérieure de l'AN; si $\theta = 90^\circ$ ou $\theta = 270^\circ$ le paramètre d est remplacé par e (Fig. A.1). Les trois points $P1, P2 \text{ et } P3$ définissant le plan ε sont donnés dans le tableau A.1 :

Tableau A.1 Points $P1, P2, P3$ (cas $\theta, d, \text{et } \varepsilon_e$)

angle θ	P1	P2	P3
$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$	$(0, d, 0)$	$(1, d + \tan \theta, 0)$	$(x_e, y_e, \varepsilon_e)$
$\theta = 90^\circ$	$(e, 0, 0)$	$(e, 1, 0)$	$(x_e, y_e, \varepsilon_e)$
$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$	$(1, d + \tan \theta, 0)$	$(0, d, 0)$	$(x_e, y_e, \varepsilon_e)$
$180^\circ < \theta < 270^\circ$	$(1, d + \tan \theta, 0)$	$(0, d, 0)$	$(x_e, y_e, \varepsilon_e)$
$\theta = 270^\circ$	$(e, 0, 0)$	$(e, -1, 0)$	$(x_e, y_e, \varepsilon_e)$
$270^\circ < \theta < 360^\circ$	$(0, d, 0)$	$(1, d + \tan \theta, 0)$	$(x_e, y_e, \varepsilon_e)$

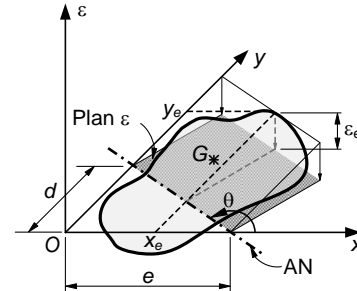


Fig. A.1 Notations (cas $\theta, d, \text{et } \varepsilon_e$)

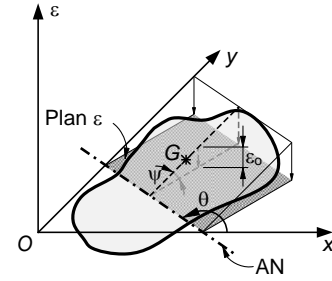
Si le plan est calculé dans un système de référence non centroïdal ($Oxy \neq Gxy$) le plan sera translaté dans Gxy avec la modification du paramètre d de l'équation du plan (il ne faut pas confondre le paramètre d de l'équation du plan avec la distance géométrique d qui positionne l'AN, Fig. A.1). Ainsi, on remplace d de l'équation du plan avec $d + b \cdot y_g + a \cdot x_g$, ou x_g et y_g sont les coordonnées du centroïde dans le système Oxy .

A.3.2 Cas $\theta, \varepsilon_o, \text{et } \psi$

Les coordonnées des trois points sont : $P1 = (0, 0, \varepsilon_o)$; $P2 = (1, -m/n, \varepsilon_o)$ si $n \neq 0$ si non $P2 = (0, 1, \varepsilon_o)$; $P3 = (m/(m^2 + n^2)^{1/2}, n/(m^2 + n^2)^{1/2}, \varepsilon_o + \psi)$ ou m , et n sont donnés dans le tableau A.2.

Tableau A.2 Coefficients m et n (cas θ , ε_0 , et ψ)

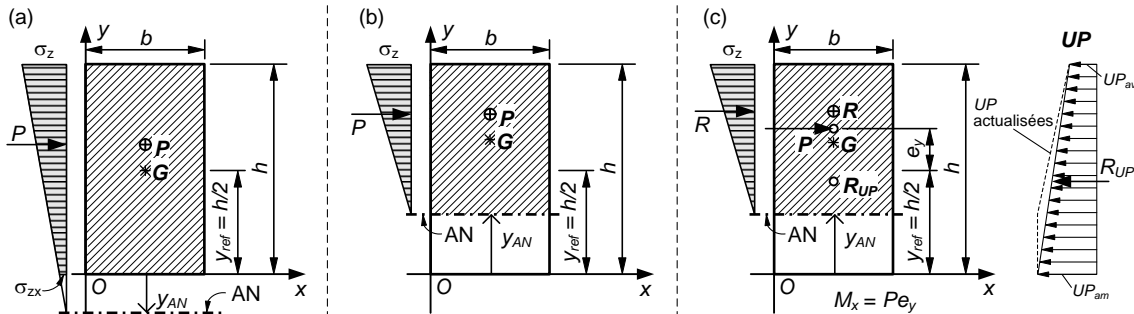
angle θ	m	n
$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$	$-\lvert \tan \theta \rvert$	1
$\theta = 90^\circ$	-1	0
$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$	$-\lvert \tan \theta \rvert$	-1
$180^\circ \leq \theta < 270^\circ$	$\lvert \tan \theta \rvert$	-1
$\theta = 270^\circ$	1	0
$270^\circ < \theta < 360^\circ$	$\lvert \tan \theta \rvert$	1

**Fig. A.2** Notations (cas θ , ε_0 , et ψ)

Le système de référence de ces trois points a son origine au point où la déformation ε_0 est donnée qui est en général le système centroïdal (voir l'observation du paragraphe précédent concernant la modification du système de référence).

A.4 Solution analytique pour le diagramme PM d'une section rectangulaire non armée

La section analysée est montrée à la Fig. A.3 ($f'_t = 0$). L'AN étant parallèle avec Ox , son angle θ est 0° ou 180° ; la solution pour 0° est aussi celle pour 180° (symétrie). Le moment est calculé comme le produit de P par son excentricité par rapport au point de référence : $M_x = P \cdot (y_P - y_{ref})$.

**Fig. A.3** Section analysée : (a) $y_{AN} < 0$; (b) $y_{AN} \geq 0$; et (c) $y_{AN} \geq 0$ et influence des SP

En employant l'hypothèse que les sections planes restent planes (déformation plane de la section) alors la distribution des contraintes normales est un trapèze si la section est complètement comprimée et l'AN est à l'extérieur de la section [Fig. A.3(a)]. La contrainte σ_{zx} étant $\sigma_{zx} = y_{AN}/(y_{AN} - h) \cdot \sigma_z$ (par triangles semblables) on déduit $P = (\sigma_{zx} + \sigma_z) \cdot b \cdot h/2 = (h - 2y_{AN}) \cdot b \cdot h \cdot \sigma_z / (2(h - y_{AN}))$; le point d'application de P se trouve dans le centroïde du trapèze $y_P = (3y_{AN} - 2h) \cdot h / (3(2y_{AN} - h))$ et $y_{ref} = h/2$. Il reste à remplacer les équations de P , y_P et y_G dans celle du $M_x = P \cdot (y_P - y_{ref})$ et à éliminer y_{AN} entre l'équation du P et du M_x afin d'avoir la fonction $f(P, M_x) = 0$, Tableau A.3.

La Fig. A.3(b) montre le cas où l'AN coupe la section (la distribution des contraintes normales est triangulaire). Par géométrie, on observe que : $P = (h - y_{AN}) \cdot b \cdot \sigma_z/2$, $y_P = (2h + y_{AN})/3$ et $y_{ref} = h/2$. En remplaçant P , y_P et y_G dans l'équation du moment $M_x = P \cdot (y_P - y_{ref})$ on arrive à la fonction qui relie P et M_x , de la forme $f(P, M_x) = 0$, Tableau A.3.

Tableau A.3 Fonction $f(P, M)$ pour une section rectangulaire non armée

Cas	Fonction $f(P, M_x)$	Équations complémentaires
$y_{AN} = -\infty$	$P = bh\sigma_z, M_x = 0$	-
$y_{AN} < 0$	$6M_x + hP - bh^2\sigma_z = 0$	$P = (\sigma_{xz} + \sigma_z)bh/2 = (h - 2y_{AN})bh\sigma_z/(2(h - y_{AN}))$ $y_P = (3y_{AN} - 2h)h/(3(2y_{AN} - h))$ $Ph^2 = 6(h - 2y_{AN})M_x$
$0 \leq y_{AN} < h$	$6b\sigma_z M_x - 3bh\sigma_z P + 4P^2 = 0$	$P = (h - y_{AN})b\sigma_z/2$ $y_P = (2h + y_{AN})/3$ $P(2y_{AN} + h) = 6M_x$
$h \leq y_{AN}$	$P = 0, M_x = 0$	-
$y_{AN} = +\infty$	$P = 0, M_x = 0$	-

La présence des SP implique un couplage hydromécanique dans le calcul de l'AN parce que l'eau rentrant dans la fissure modifie les SP et par conséquent les charges appliquées (la charge P et le moment M_x dans le Tableau A.3 ne pouvant pas être définis dès le début). Les équations ci-dessous sont valides pour une distribution trapézoïdale des SP [Fig. A.3(c)], mais elles sont généralisables pour d'autres distributions. On peut prouver, en calculant l'aire du trapèze (R_{UP}), son centre de gravité (y_{RUP}) et avec la notation $UP_{mv} = UP_{am} - UP_{av}$, que : $R_{UP} = (UP_{mv}y_{AN}/2 + (UP_{am} + UP_{av})h/2) \cdot b$ et $M_{xRUP} = R_{UP}(y_{RUP} - y_{ref}) = (UP_{mv}y_{AN}^2/6 - UP_{mv}hy_{AN}/12 - UP_{mv}h^2/12) \cdot b$. Ensuite, en utilisant l'équation $(P + R_{UP})(2y_{AN} + h) = 6(M_x + M_{xRUP})$ du Tableau A.3, on déduit :

$$y_{AN} = \frac{6 \cdot M_x - h \cdot P - b \cdot h^2 \cdot UP_{am}}{2 \cdot (P + b \cdot h \cdot UP_{am})}; \text{ qui est valide si } 0 \leq y_{AN} \leq h \quad (\text{A.6})$$

A.5 Résultantes des contraintes pour piliers à variation longitudinale 3D

On montre ci-dessous l'équilibre pour P , V_x et M_x , M_y , T la démonstration pour V_y étant identique avec celle de V_x si on applique une rotation appropriée à la variable $x \rightarrow y$. Pour le cisaillement pur P , M_x , M_y sont satisfaites par la forme de σ_z ; la torsion est traitée séparément (chapitre 5).

A.5.1 Résultantes dues à l'application du cisaillement biaxial

$$V_x = \int_{A(z)} \tau_{xz} dA \Big|_{z=0} = \int_A \tau_{xz} + x \underbrace{\left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right)}_{=0(\text{équation d'équilibre})} dA = \underbrace{\int_A \frac{\partial(x\sigma_z)}{\partial z} dA}_{H_1} + \underbrace{\int_A \frac{\partial(x\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(x\tau_{yz})}{\partial y} dA}_{H_2} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{aligned}
H_1 = -E \int_A x \frac{\partial}{\partial z} (\sigma_{0z} + \sigma_{1z}(x - x_g) + \sigma_{2z}(y - y_g)) dA = -E \left(\frac{\partial \sigma_{0z}}{\partial z} - \sigma_{1z} \frac{\partial x_g}{\partial z} - \sigma_{2z} \frac{\partial y_g}{\partial z} \right) \underbrace{\int_A x dA}_{=0 \text{ (centroïde)}} \Big|_{z=0} \dots \\
\dots - E \frac{\partial \sigma_{1z}}{\partial z} \int_A x^2 dA \Big|_{z=0} - E \frac{\partial \sigma_{2z}}{\partial z} \int_A xy dA \Big|_{z=0} = -EI_y \frac{\partial \sigma_{1z}}{\partial z} - EI_{xy} \frac{\partial \sigma_{2z}}{\partial z}, \text{ avec } x_g = y_g = 0 \quad (\text{A.8})
\end{aligned}$$

En remplaçant les fonctions σ_{1z} , σ_{2z} des (4.3), (4.4), avec (4.A.7) en dérivant et simplifiant on arrive à :

$$H_1 = V_x - \frac{P}{A} \left(\frac{d}{dz} \int_A x dA \right)_{z=0} + \frac{RM_y I_x - RM_x I_{xy}}{I_c} \left(\frac{d}{dz} \int_A x^2 dA \right)_{z=0} + \frac{RM_x I_y - RM_y I_{xy}}{I_c} \left(\frac{d}{dz} \int_A xy dA \right)_{z=0} \quad (\text{A.9})$$

Pour le terme de contour on remplace aussi les fonctions σ_{0z} , σ_{1z} , σ_{2z} et on déduit :

$$\begin{aligned}
H_2 = \int_A \frac{\partial(x\tau_{xz})}{\partial x} + \frac{\partial(x\tau_{yz})}{\partial y} dA \xrightarrow{\text{théorème de Green}} \int_{\Gamma} x(\tau_{xz}l + \tau_{yz}m) ds = \int_{\Gamma} x \cdot -\sigma_z n_z ds = \dots \\
\dots = -\frac{P}{A} \left(\int_{\Gamma} x n_z ds \right)_{z=0} + \frac{RM_y I_x - RM_x I_{xy}}{I_c} \left(\int_{\Gamma} x^2 n_z ds \right)_{z=0} + \frac{RM_x I_y - RM_y I_{xy}}{I_c} \left(\int_{\Gamma} x y n_z ds \right)_{z=0} \quad (\text{A.10})
\end{aligned}$$

En utilisant la propriété (5.18) et en observant que les fonctions sous le signe de l'intégrale sont indépendantes de z on arrive à $H_1 + H_2 = V_x$ (q.e.d.). La propriété (5.18) sera prouvée dans la section suivante.

A.5.2 Résultantes dues à l'application de la torsion

$$P = \int_{A(z)} \sigma_{zw} dA \Big|_{z=0} = \int_A E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \phi dA = E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \underbrace{\int_A \phi dA}_{=0} = 0 \quad (\text{A.11})$$

$$M_x = \int_{A(z)} \sigma_{zw} \cdot y dA \Big|_{z=0} = \int_A E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \phi \cdot y dA = E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \underbrace{\int_A \phi \cdot y dA}_{=0} = 0 \quad (\text{A.12})$$

$$M_y = - \int_{A(z)} \sigma_{zw} \cdot x dA \Big|_{z=0} = - \int_A E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \phi \cdot x dA = -E \frac{d^2 \theta}{dz^2} \underbrace{\int_A \phi \cdot x dA}_{=0} = 0 \quad (\text{A.13})$$

Les intégrales en (A.11)-(A.13) sont nulles pour le centre de cisaillement (ou le problème de torsion est décrite) étant les trois conditions pour trouver le centre de cisaillement (Sapountzakis et Mokos 2003).

$$V_{xSV} = \int_{A(z)} \tau_{xzSV} dA \Big|_{z=0} = \int_A \tau_{xz} + x \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dA = \int_{\Gamma} x \underbrace{(\tau_{xz}l + \tau_{yz}m)}_{=0 \text{ (cond. limites)}} ds = 0 \quad (\text{A.14})$$

$=0 \text{ (eq. d'équilibre)}$

$$V_{xW} = \int_{A(z)} \tau_{xzw} dA \Big|_{z=0} = \int_A \tau_{xz} + x \left(\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} \right) dA = E \frac{d^3 \theta}{dz^3} \underbrace{\int_A \phi x dA}_{=0 \text{ (} M_y = 0 \text{)}} + \int_{\Gamma} x \underbrace{(\tau_{xz}l + \tau_{yz}m)}_{=0 \text{ (cond. limites)}} ds = 0 \quad (\text{A.15})$$

$=0 \text{ (eq. d'équilibre)}$

$$T_{SV} = \int_{A(z)} (-\tau_{xzSV} y + \tau_{yzSV} x) dA \Big|_{z=0} = G \underbrace{\frac{d\theta}{dz} \int_A \left(-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) y + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) x \right) dA}_{J} = GJ \frac{d\theta}{dz} \quad (A.16)$$

$$\begin{aligned} T_W &= \int_{A(z)} (-\tau_{xzW} y + \tau_{yzW} x) dA \Big|_{z=0} = \int_A \left(G \frac{\partial \varphi_S}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) + G \frac{\partial \varphi_S}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right) dA = \dots \\ &= G \int_A \left(\frac{\partial \varphi_S}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) + \frac{\partial \varphi_S}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) \right) dA - G \int_A \left(\frac{\partial \varphi_S}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_S}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dA \xrightarrow{\text{théorème de Green}} \dots \\ &= -G \int_A \varphi_S \underbrace{\nabla^2 \varphi}_{=0} dA + G \int_{\Gamma} \varphi_S \underbrace{\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) l + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) m \right)}_{=0(\text{cond. limites SV})} ds + G \int_A \varphi \cdot \nabla^2 \varphi_S dA - G \int_{\Gamma} \varphi \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi_S}{\partial x} l + \frac{\partial \varphi_S}{\partial y} m \right)}_{=0(\text{cond. limites W})} ds = \dots \\ &= -E \frac{d^3 \theta}{dz^3} \int_A \varphi \cdot \varphi dA = -E \frac{d^3 \theta}{dz^3} \underbrace{\int_A \varphi^2 dA}_{C_w} = -EC_w \frac{d^3 \theta}{dz^3} \quad (A.17) \end{aligned}$$

A.6 Dérivée sur le signe intégral pour un domaine variable longitudinalement

Le domaine pour l'intégration est limité en haut et en bas par les courbes $y_i(x, z)$ et $y_b(x, z)$ et à gauche et à droite par les lignes verticales (pouvant être réduites aux points) $x_u(z)$ et $x_d(z)$, Fig. 5.2. Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_{A(z)} f(x, y, z) dA &= \frac{d}{dz} \int_{x_u(z)}^{x_d(z)} \underbrace{\left(\int_{y_b(x,z)}^{y_i(x,z)} f(x, y, z) dy \right)}_{G(x,z)} dx \xrightarrow{\text{règle de Leibniz}} \int_{x_u}^{x_d} \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{y_b}^{y_i} f(x, y, z) dy \right) dx \dots \\ &= \dots + G(x_d, z) \frac{dx_d}{dz} - G(x_u, z) \frac{dx_u}{dz} \xrightarrow{\text{règle de Leibniz}} \int_{x_u(z)}^{x_d(z)} \int_{y_b(x,z)}^{y_i(x,z)} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dy dx + \int_{x_u(z)}^{x_d(z)} f(x, y_i, z) \frac{\partial y_i}{\partial z} dx \dots \\ &\quad \dots - \int_{x_u(z)}^{x_d(z)} f(x, y_b, z) \frac{\partial y_b}{\partial z} dx + \int_{y_b(x_d,z)}^{y_i(x_d,z)} f(x_d, y, z) \frac{dx_d}{dz} dy - \int_{y_b(x_u,z)}^{y_i(x_u,z)} f(x_u, y, z) \frac{dx_u}{dz} dy \quad (A.18) \end{aligned}$$

Les courbes x_u , x_d , y_b , y_i sont définies par l'équation implicite de la surface : $F(x, y, z) = 0$. Ainsi, les dérivés doivent être calculées avec les règles de dérivation implicite (Sokolnikoff et Sokolnikoff 1941, pp. 138) : $dx_u/dz = dx_d/dz = -F'_z/F'_x$ et $dy_b/dz = dy_i/dz = -F'_z/F'_y$. Le domaine des intégrales en dy sont des lignes verticales (x_u , x_d) et par la suite on peut écrire $dy = ds$ avec ds étant mesuré sur le segment Γ qui est la ligne verticale; ce fait peut être montré rigoureusement en utilisant deux changements de variable $ds \rightarrow dt \rightarrow dy$ (Dawkins 2007a). Pour transformer dx en ds on utilise la dérivée implicite du contour représenté par la courbe de niveau $F(x, y, z_{\text{niveau}})$:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \sqrt{1 + \left(-\frac{F'_x}{F'_y} \right)^2} dx = \frac{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y}}{|F'_y|} dx \Rightarrow dx = \frac{|F'_y|}{\sqrt{F'^2_x + F'^2_y}} ds \quad (A.19)$$

En notant que la normale des courbes $x_u(z)$ et $x_d(z)$ est $\langle -1, 0 \rangle$ respectivement $\langle 1, 0 \rangle$ on réécrit la dérivée

implicite de ces courbes pour avoir la même forme que (A.19) : $F'_x = \text{sgn}(F'_x) \sqrt{F_x'^2 + \underbrace{F_y'^2}_{=0}}$ (avec $\text{signum} =$

$\text{sgn}(t) = |t|/t$), $(dx_u/dz)dy = F'_z/\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}ds$ et $(dx_d/dz)dy = -F'_z/\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}ds$. Comme F'_y , la composante y de la normale, des courbes limites $y_b(x, z)$ et $y_t(x, z)$ est négative respectivement positive et à l'aide de la fonction sgn on déduit : $(dy_b/dz)dx = F'_z/\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}ds$ et $(dy_t/dz)dx = -F'_z/\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}ds$.

Si on introduit toutes les propriétés montrée ci-dessus dans (A.18) on arrive à ($n_z = F'_z/\sqrt{F_x'^2 + F_y'^2}$) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \int_{A(z)} f(x, y, z) dA &= \int_{A(z)} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dA - \int_{\Gamma_t(z)} f(x, y, z) \cdot n_z ds - \int_{\Gamma_b(z)} f(x, y, z) \cdot n_z ds - \int_{\Gamma_d(z)} f(x, y, z) \cdot n_z ds \dots \\ &\dots - \int_{\Gamma_u(z)} f(x, y, z) \cdot n_z ds \xrightarrow{\Gamma = \Gamma_t \cap \Gamma_b \cap \Gamma_d \cap \Gamma_u} \int_{A(z)} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dA - \int_{\Gamma(z)} f(x, y, z) \cdot n_z ds \text{ q.e.d.} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

Si f est indépendante de z (A.20) prend la forme plus simple $\frac{d}{dz} \int_{A(z)} f(x, y) dA = - \int_{\Gamma(z)} f(x, y) \cdot n_z ds$.

Ci-dessus les propriétés suivantes ont été utilisées : $\int_A \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot g dA = \int_{\Gamma} f \cdot g \cdot n_i ds - \int_A f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i} dA$ (la théorème

de Green, intégration par parties) et $\frac{d}{dz} \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} f(x, z) dx = \int_{x_1(z)}^{x_2(z)} \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} dx + f(x_2, z) \frac{dx_2}{dz} - f(x_1, z) \frac{dx_1}{dz}$ (la règle de Leibniz).

ANNEXE B

ARTICLES COMPLÉMENTAIRES DE CONFÉRENCES PUBLIÉS

Trois articles complémentaires de conférences ont été publiés. Ces articles s'incluent dans le contexte plus général d'analyse de barrages englobant l'analyse dynamique et les barrages armés.

B.1 Article c1 : Three-dimensional seismic stability evaluation of spillway structures considering concrete cracking

Article publié lors du Congrès annuel de l'Association canadienne des barrages, 2008; auteurs : Lucian Stefan, Annie Limoges et Pierre Léger, http://www.cda.ca/cda_new_en/publications.

B.1.1 Introduction

Earthquakes have affected several large concrete dams and spillways in the past. Although no catastrophic failure has yet been reported unless a dam crosses a fault (Shi-Kang water supply weir, Taiwan 1999) it is required by regulatory agencies to perform periodic seismic safety assessment of these facilities. This is particularly important in the context of aging structures constructed several years ago with minimal or no considerations for seismic loads. It is thus important to develop a systematic and progressive structural analysis methodology to characterize the seismic behaviour of gated spillways, for which the stability of the piers is threaten by the upstream-downstream (us/ds) excitation acting simultaneously with the excitation promoting cracking around the weak axis of the piers. Concrete hydraulic structures are usually analyzed by methods of increasing complexity ranging from the pseudo-static method to linear or nonlinear transient dynamic analysis. This paper presents a seismic stability assessment methodology to bridge the gap between 3D linear elastic seismic finite element (FE) analysis of spillways piers, that could easily be done using commercial software, and a 3D extension of the gravity method to compute safety indicators accepted by the profession.

The outline of the paper is as follows. First, different methods for seismic stability of concrete hydraulic structures are presented. Then, a three dimensional extension of the gravity method is developed accounting for bi-axial moment interactions ($P-M_x-M_y$) considering concrete cracking and uplift pressures. Three-dimensional seismic analyses of a 30 m high gated spillway built 80 yrs ago is presented as an application example. Three-dimensional sets of spectrum compatible ground motions are developed in the longitudinal, transverse, and vertical directions for return periods of 200 yrs, and 2500 yrs corresponding respectively to the operating basis earthquake (OBE) and the maximum design earthquake (MDE) for a typical site on rock located in the Ottawa Valley. Pseudo-static and pseudo-dynamic analyses are then performed using only classical us/ds and vertical excitations. Three-dimensional transient dynamic linear finite element analyses are then used to compute shear forces and moments at the base joint, and an upper joint located above the chute. These forces are then input to a post-processor computer program to

evaluate concrete cracking and sliding stability. The effects of different assumptions considering the accumulation of cracking damage to compute the compressed area upon which cohesive resisting forces could be developed are examined. A simplified approach is developed to identify the critical time step for which the sliding safety factor (SSF) will be minimal in the context of a 3D transient cracking analysis.

B.1.2 Progressive methodology for seismic stability of gated spillways

Fig. B.1 shows a typical spillway pier subjected to seismic loads. Static and seismic inertia forces and bending moments acting on different analysis planes are computed. The resulting moments (M_x , M_y) as well as the axial force P are first used to perform a normal stress analysis to determine the extent of cracking. The driving shear forces (V_x , V_y) acting on the remaining compressed area are then used in the sliding stability assessment. Using this approach seismic analysis of concrete dams and spillways could be performed with a progressive methodology divided in four basic analysis levels of increasing complexity (Léger 2007). These are shown in Table B.1.1: (1) the pseudo-static (seismic coefficient method), (2) the pseudo-dynamic (response-spectra) method, (3) linear or nonlinear transient dynamic finite element methods, and (4) the transient rigid body dynamic method for cracked components. It is important to maintain consistency in modeling assumptions while comparing the results from one type of analysis to another. Obviously as the fundamental period of the structure tends to zero (rigid dam), the results of response spectrum or transient dynamic analysis should tend to the results obtained from the pseudo-static method (seismic coefficient). The application of the pseudo-static, the pseudo-dynamic and the transient dynamic FE methods combined with a cracking model is detailed in section B.1. 6.

In analogy with what is done for buildings and bridges in our proposed methodology a linear dynamic analysis is first performed to account for dynamic amplification of inertia forces. Then the sliding analysis is performed using reduced effective inertia forces. It is obvious that the inertia forces computed in this manner are not equal to those from a FE model that accounts for transient nonlinear behaviour where the period of vibrations are continuously changing. However, a full 3D nonlinear dynamic analysis with appropriate cracking constitutive models is still limited to the research area.

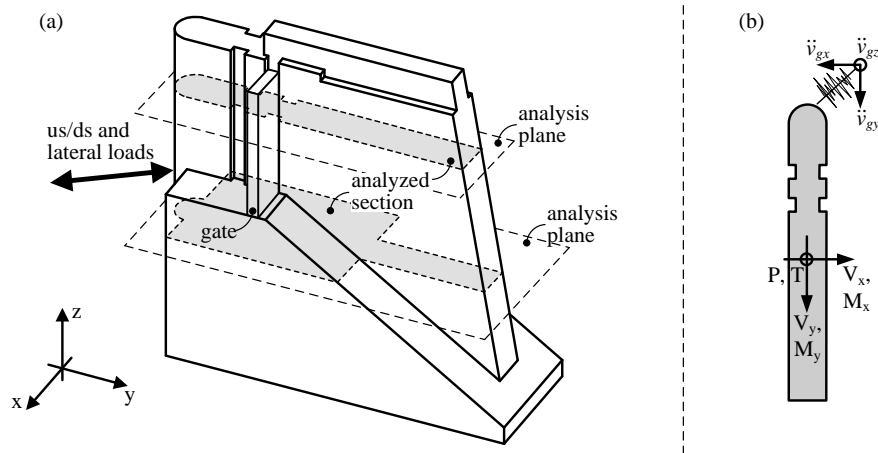


Fig. B.1.1 Spillway pier subjected to seismic loads

Table B.1.1 Progressive approach for seismic stability

Method	Excitation	Dynamic Characteristics	Response
1. Pseudo-static (seismic coefficient)	PGA (cracking) Sustained Acc. (stability)	Mass Infinite stiffness (No dyn. amplification)	Non-oscillatory Equivalent static
2. Pseudo-dynamic (response-spectra)	Design spectra Peak (cracking) Sustained (stability)	Mass, Stiffness, Damping (Dyn. amplification)	Non-oscillatory Max. probable
3. Dynamic (FE) (Lin. / Non-Lin.)	Accelerogram	Mass, Stiffness, Damping (Dyn. amplification)	Oscillatory History (+ / -)
4. Dynamic (Rigid body)	Accelerogram	Mass, Restoring force (friction, inelastic impact)	Oscillatory

B.1.3 Three-dimensional extension of the gravity method

The hydraulic structure in general, and spillways piers in particular, are three-dimensional structures loaded three-dimensionally (Fig. B.1.1). The structural stability evaluation of these structures is classically done with the so-called "*gravity method*", which is a one-dimensional (1D) analysis. This method is based on the application of rigid body equilibrium and on the beam theory where a linear distribution of the normal stresses is assumed. The majority of dam safety guidelines recommend the application of the gravity method as the first step whenever this is applicable, mostly because of two important advantages: simplicity and numerical stability (CDA 2007, FERC 2002, USACE 1995). They also recommend various linear upstream/downstream uplift pressure distributions for different situations, including cracked structures and the presence of drains. However, seismic loading along the weak axis of spillway piers, which could be particularly critical, can not be considered directly with the classical gravity method.

To eliminate this disadvantage a three-dimensional extension of the gravity method was proposed (Stefan and Léger 2008). It uses a nonlinear method for hydromechanical cracking analysis of an arbitrary section subjected to biaxial bending, P - M_x - M_y ; the material is elastic but with a limited tensile resistance, f_t . The uplift pressure (UP) could be kept constant (e.g. seismic case) or could be updated according to the in-plane section cracking. With the well-known assumptions of the beam theory (linear distribution of strain, elastic material) the planar distribution of the normal stresses is, σ_z :

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{M_x I_y + M_y I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot y - \frac{M_y I_x + M_x I_{xy}}{I_x I_y - I_{xy}^2} \cdot x \quad (\text{B.1.1})$$

In (B.1.1) P is the axial resultant; $M_x = P \cdot e_y$ and $M_y = -P \cdot e_x$ are the bending moment about the x and y axes with e_x and e_y being the eccentricities of P with respect to the section centroid (Fig. B.1.2); A is the area of the section; I_x , I_y and I_{xy} are the centroidal properties of the section: the x and y moments of inertia and the product of inertia.

The main objective of a cracking analysis is to obtain the neutral axis (NA) position when the three equilibrium integrals are simultaneously quasi-null for the given resultants (applied forces and computed uplift pressures):

$$I_P = \int_{Au} \sigma_z dA - P; \quad I_{M_x} = \int_{Au} \sigma_z \cdot y dA - M_x; \quad I_{M_y} = \int_{Au} \sigma_z \cdot x dA - M_y \quad (\text{B.1.2})$$

with the condition $\sigma_{z \text{ tensile}} \leq f_t$.

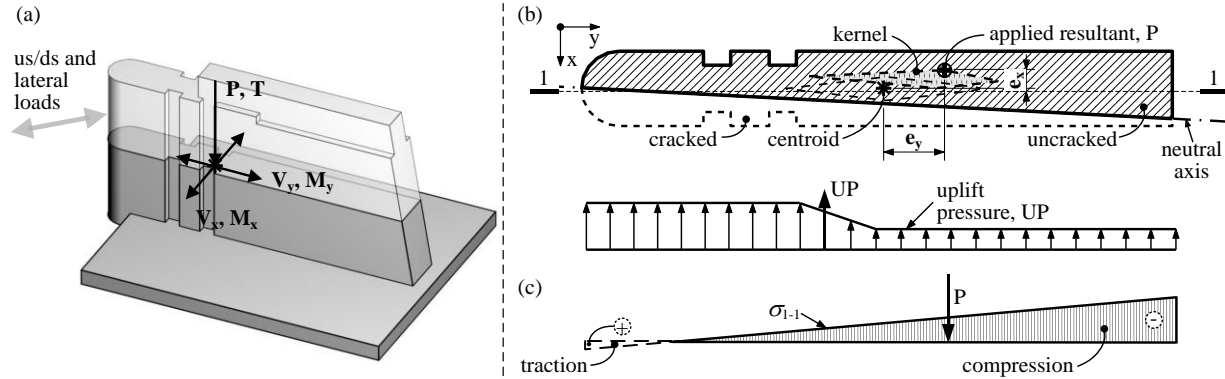


Fig. B.1.2 3D extension of the gravity method

If the material has a limited tensile resistance (f_t) there will be a cracked part of the section ($\sigma_z > f_t$) that should be eliminated when computing the integrals (B.1.2). Furthermore, as compared to the initial section, the uplift pressure can change over the cracked section because the pressurized water can enter in the cracks and produce additional pressure. The solution to (B.1.2) leads to two difficulties: (a) the computation of the uplift pressure according to the cracked section, and (b) the finding of the uncracked area or the position of the NA. The determination of the NA position creates a coupled hydromechanical problem: the UP changes in the cracked section which in turn is modified by the UP. Thus, the method to find a solution to (B.1.2) is non-linear and iterative.

When the NA position is known, it is possible to further compute other structural results: the uncracked and the compressed area, the kernel of the final section, SSF, etc. The kernel may be defined as that part of the section in which if a force is applied, it produces only compressive stresses over the section; it corresponds to the middle third of rectangular sections (Fig. B.1.2b). The kernel is particularly important to visually evaluate the possibility of the resultant to produce tensile stresses.

The uplift pressures are updated for static loads, but they are assumed to be constant during seismic loads. To update the UP, the usual linear distribution (characteristic for a P - M interaction) is replaced by a multi-planar distribution (consequence of in-plane cracking due to a P - M_x - M_y loading condition). When the section is completely cracked in us/ds direction, this distribution could produce a discontinuity in the evaluation of UP. For these cases, a mechanically informed heuristic algorithm was developed. It has the ability to find the UP discontinuity and to eliminate it for the rest of the iterative process. Consequently, the proposed cracking analysis method converges virtually always to an acceptable engineering solution (Stefan and Léger 2008).

B.1.4 3d Dynamic Transient Analysis Considering In-plane Concrete Cracking

B.1.4.1 Finite Element Method to Account for Dynamic Amplification

A transient dynamic finite element analysis could produce hundreds or thousands of pairs P - M_x - M_y , each being calculated for a different time step corresponding to an accelerogram. For example, if the duration of an earthquake record (E) is 15 s and a reasonable time step is taken as 0.002 s, the total number of computation points or pairs is 7500. To determine the critical/minimum SSF it is necessary to first calculate the uncracked area for all these points.

However, analyzing a section for such a high amount of load pairs could be cumbersome if an inefficient methodology is used. For a 3D seismic analysis this number of points could dramatically increase due to the combinations of the earthquake directions: longitudinal-transversal-vertical.

In this section, an innovative methodology to assess the seismic stability of spillway piers is proposed (Fig. B.1.3). The first step is to clearly describe the ground motion data and the hydromechanical model (Fig. B.1.3a [2, 3]). For the ground motion data, the specification of the return period and the accelerogram of the earthquake as well as the combination rule for the earthquake directions: E_{Long} , E_{Transv} , E_{Vert} , are required. The hydromechanical model includes the definition of the geometry and material characteristics, the uplift pressure model (e.g. modifiable or constant during the cracking, boundary values, etc.) and the cracking model (detailed hereafter). With this data a linear transient dynamic finite element analysis could be done, and the pairs of forces ($P-M_x-M_y$), considering dynamic amplification, will be obtained at each time step. Note that in this dynamic FE analysis we ignore two key characteristics of a hydraulic structures: the uplift pressures and the limited/zero tensile resistance, f_t . To account for these the FE resultant forces will be input to a post-processor computer program to evaluate concrete cracking and sliding stability. The cracking analysis will provide useful structural indicators to have enough data to assist the engineer in the decision making process regarding the stability of spillway piers (Fig. B.1.3a [8-9]).

B.1.4.2 Computation of Structural Stability Indices

The post-processor uses the above-mention three-dimensional extension of the gravity method (Fig. B.1.3a [5]) to calculate the position of the neutral axis (NA) including the inertia forces, the effect of the uplift pressure, and also the static loads (hydrostatic pressure, weight of the hoist and bridge, etc.). The NA position further permits the calculation of the cracked/uncracked area of the section (i.e. that part of the section where the tensile stresses exceed the tensile strength). While dealing with a dynamic transient analysis, one uncracked area (A_u) will be computed for each time step (where $P-M_x-M_y$ are given), such that this uncracked area will have a variation in time, $A_u \rightarrow A_u(t)$. In this context, one could define three different areas: the *uncracked area* (A_u), the *part in compression of the uncracked area* (A_c) and the *continuously compressed area* (A_{cc}). Hence, A_u is the area for which $\sigma_z \leq f_t$; A_c is the part in compression ($\sigma_z \leq 0$) of A_u which is calculated for any time step ignoring the other time steps; finally, A_{cc} is the part of the section which always remains in compression ($\sigma_z \leq 0$), regardless of the time step (no part of A_{cc} was ever in tension). By knowing A_u , A_c could be easily computed, so the main objective is to determine A_u ; furthermore, the cracked area, defined as $A_{crk} = A - A_u$, is the part of the section where $\sigma_z > f_t$. The compressed area, A_{cc} , is less or equal to A_c because A_{cc} can be seen as an intersection of the A_c of all time steps. If A_u has no variation in time there is no difference between A_c and A_{cc} . These definitions are useful when calculating the sliding safety factor (SSF) using the equation (Leclerc et al. 2003):

$$SSF = \frac{(P_a + UP) \cdot \tan \phi + c \cdot A_{pc}}{V} \quad (B.1.3)$$

In (B.1.3): P_a and UP are the axial applied external loads and the computed uplift pressure respectively ($P_a + UP$ equals the applied axial resultant); ϕ is the friction angle; c is the cohesion (either real, c_{real} , or apparent, c_{app} , Figs. B.1.6b-6c); A_{pc} is the part of the section in compression for which the cohesion is considered. The choice of A_{pc}

defines the cracking model: if A_c is used the cracking model is called "*without memory*", and if A_{cc} is used the model becomes "*with memory*". It is called *with memory* because the algorithm should memorize the evolution of the uncracked area at each time step to continuously adjust the compressed area. The effect of this choice (A_c vs. A_{cc}) will be shown in an example in section B.1.6. The cracking model could eventually be further refined between these two limits: with/without memory. Thus, A_{pc} can be chosen as an intermediate value between A_c and A_{cc} and/or the cohesion could be considered variable at different points of the section. For the purpose of this paper, A_{pc} will be taken only as A_c or A_{cc} and the implications of the other possibilities will be discussed. If the uplift pressure and the A_{pc} are computed *for each time step*, the SSF is further determined and, in the end, its minimal value can be identified.

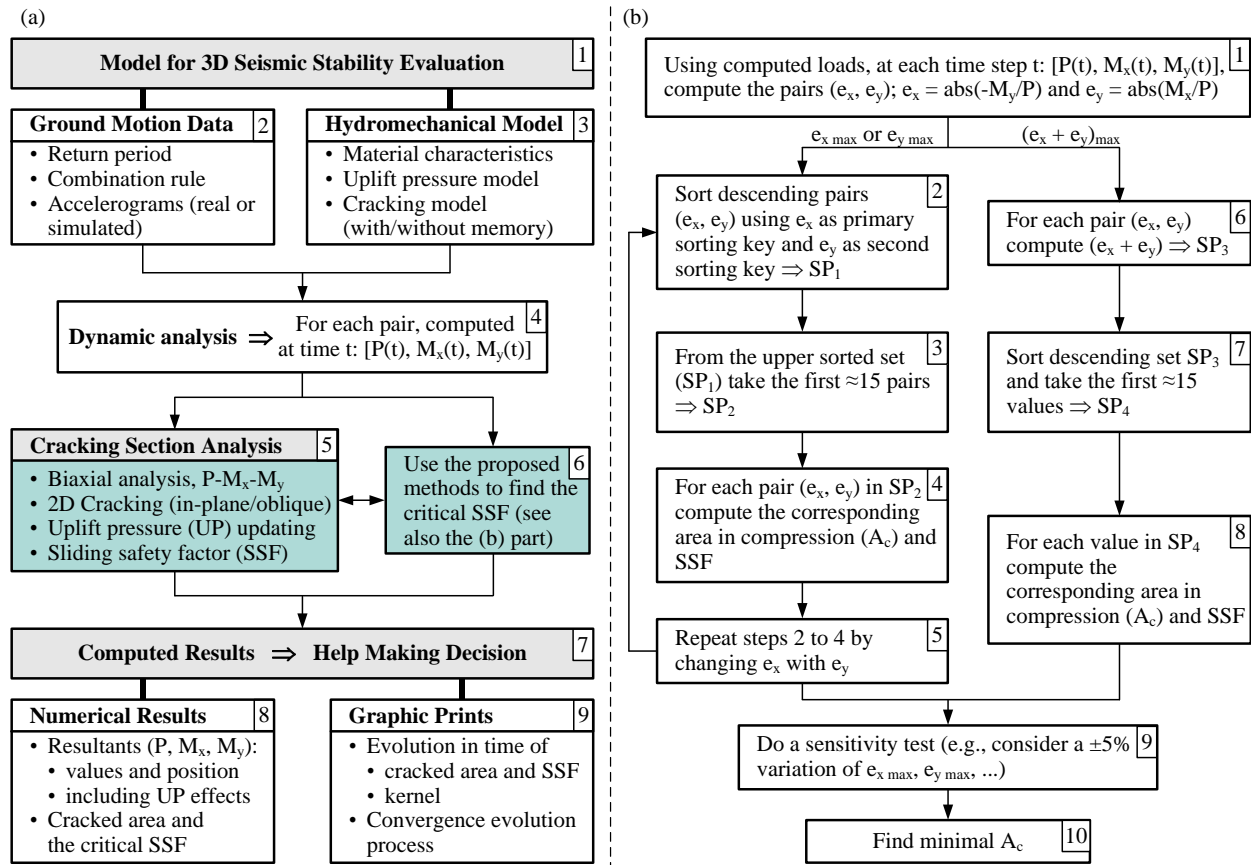


Fig. B.1.3 3D Seismic stability evaluation using linear dynamic transient analysis

However, an alternative simpler method to find the minimum SSF, without analyzing all time steps, could be helpful (Fig. B.1.3b). The minimum SSF is obtained from (B.1.3) if $(P_a + UP)$ and A_{pc} have their minimal values and V has its maximum, for a given set of ϕ and c . The axial force, P_a , and the shear force, V , being computed by a dynamic analysis and UP being kept constant, the remaining variable in the equation is A_{pc} . Thus, the problem is to find the minimum A_{pc} that would be obtained among all load points without computing it for each point.

It can be observed, at a closer examination of the biaxial cracking algorithm, that if the material does not support any

tensile stresses the final position of the resultant will be on the border of the uncracked section kernel. This is logical because by definition where the resultant is inside the kernel there will be no tensile stresses over the section. Consequently, the computation of the compressed area could be turned into a search problem: "how to find the section for which the kernel touches the resultant". There would be several solutions to this problem but only one will respect the mechanical equilibrium condition (B.1.2). In other words, the kernel of the original section *moves* so that it touches the resultant. If this "*kernel migration*" is important, then the uncracked area will decrease, because there is a direct relation between the kernel and the NA movement (the NA will cut-out a larger portion of the section). It can be observed that in general the kernel "touches" the resultant in one of his corners. The kernel concept could be extended for the case where limited tensile stresses are permitted ($\sigma_z < f_t$).

Based on this idea, the distance between the resultant and the kernel of the original section (or the *migration distance*) could be used to predict the uncracked area. If the resultant is inside or on the border of the original section kernel, the entire section is uncracked (null migration distance). If the resultant is outside of the section (the entire section being cracked) there will be no uncracked area because the kernel must be material (impossible migration). These observations are in fact logical and correct. Despite the fact that the migration distance is useful, there are two disadvantages when using it: (a) the calculation of the kernel of an arbitrary section is not an easy task without a program; (b) even when the kernel is known, there still remains the geometric problem of determination the minimum distance between a point and an arbitrary polygon for each load points. For this reasons, a more accessible technique was developed without any important loss of accuracy.

This technique (Fig. B.1.3b), also employs the position of the resultant to characterize the uncracked area. It replaces the calculation of the distance between the resultant and the kernel with the distance between the resultant and the centroid (the so-called "eccentricity"). This implies solely simple calculations that could be done with standard spreadsheet software. The minimum uncracked area will be found in general among the combinations which have maximum eccentricity in one direction (e_x , e_y) or the maximum of the sum of the eccentricity absolute values. First, the eccentricities and their sum must be sorted in descending order. If for a particular eccentricity in one direction, there are several corresponding eccentricities in other direction, only the maximum corresponding value will be picked. Consider as an arbitrary example the following series composed of five $[(e_x, e_y)]$ pairs: [(3.05, 5.03), (3.05, 1.06), (3.05, 6.08), (0.25, 9.53), (2.59, 8.10)]. For $e_{x\max} = 3.05$ m there are *three correspondent* e_y but only the maximum should be used: $[(e_{x\max} = 3.05 \text{ m}, e_y = 6.08 \text{ m})]$; then, the maximum eccentricity in y direction is $[(e_x = 0.25 \text{ m}, e_{y\max} = 9.53 \text{ m})]$. Note that the maximum eccentricity in one direction with its maximum corresponding value in the other direction does not guarantee that their sum is maximal. For example, in the above series of pairs the maximum sum is $[e_x = 2.59 \text{ m} + e_y = 8.10 \text{ m}]$ without having e_x or e_y maximal. Using the method presented in Fig. B.1.3b, the computing effort is significantly reduced from thousand of calculation points to only ≈ 30 . This number of points could be further decreased with the strategy presented in 6.3.3. However, the main disadvantage of that strategy is that the evolution of uncracked area and SSF is lost and the evaluation is generally more severe and conservative.

B.1.5 Spillway analyzed

B.1.5.1 Description of the Model

The analyzed gated spillway is located in Canada and was built in 1927. The structure is approximately 38 m high including the lifting structure (steel towers and hoist bridge) and 100 m wide (Fig. B.1.4a); the piers are ≈ 30 m high. It comprises five $15.86 \text{ m} \times 8.47 \text{ m}$ Stoney gates weighing $\approx 500 \text{ kN}$ and driven by two hoists. The average weight of each hoist is 370 kN . The spillway rests on a good quality granitic rock foundation.

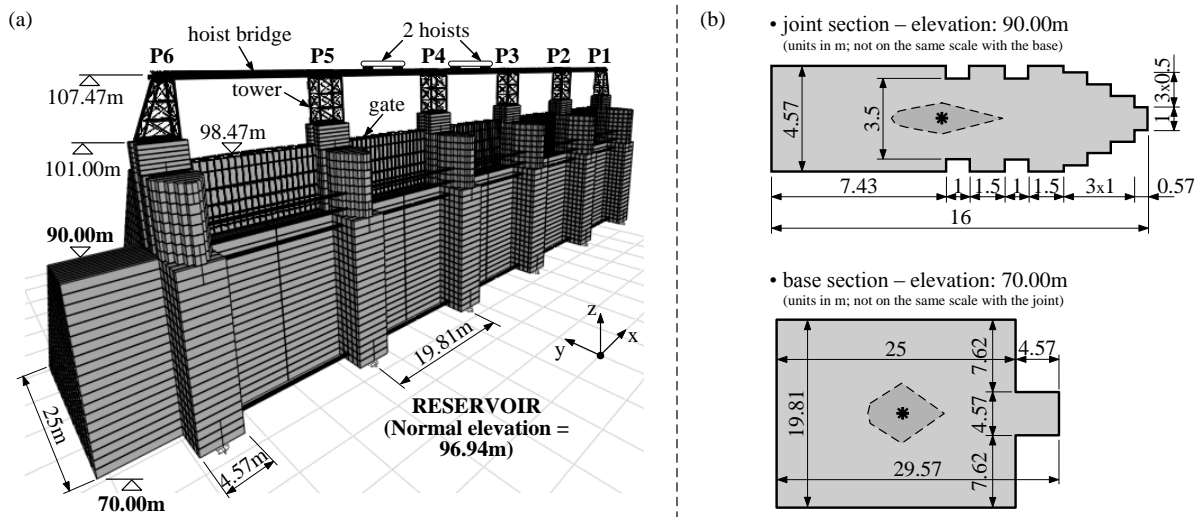


Fig. B.1.4 Analyzed spillway

A 3D finite element spillway model with respectively 34 165 and 16 881 static and dynamic degrees-of-freedom was built with the computer program SAP2000 (CSI 2007), Fig. B.1.4a. Concrete piers and chutes are discretised with thick shell elements. The steel lifting structure is composed of beam-column frame elements. The steel gates are represented with frame and shell elements constrained on both sides of the piers for longitudinal (y - y) and transverse (x - x) translations and constrained for vertical translation at the bottom. The spillway is resting on an assumed rigid foundation. The principal material properties of the concrete lift joints are: $E_c = 21200 \text{ MPa}$, $f'_c = 17 \text{ MPa}$, $f_t = 0 \text{ MPa}$. For the interface the following values were introduced: (a) concrete-rock interface: $\phi = 44^\circ$, $c_{app} = 200 \text{ kPa}$; (b) concrete-concrete interface: $\phi = 49^\circ$, $c_{app} = 480 \text{ kPa}$.

The following static loads were considered: the structure self-weight, the hydrostatic, uplift and hydrodynamic pressures that were evaluated for the reservoir normal elevation (+96.94 m). Hydrostatic pressures are modeled with distributed forces acting on the concrete structure and gates. Upstream hydrodynamic pressures are represented with Westergaard added masses. The distribution of the UP is linear having for the wetted parts of the structure the full adjacent hydrostatic pressure ($26.94 \text{ m} \cdot \gamma_{water}$ for the base and $6.94 \text{ m} \cdot \gamma_{water}$ for the joint +90 m) and a null value for the parts that are subjected to atmospheric pressure (Limoges 2008).

The earthquake analysis was divided in two main parts: linear dynamic finite element analysis (FEA) and

post-processor analysis (PPA). In the first part (FEA), linear transient modal superposition analyses are performed using Ritz vectors in SAP2000 (CSI 2007) with an integration time step of $7.5 \cdot 10^{-4}$ s and 5% modal damping to compute internal forces. Fundamental periods of the gates and the steel lifting structure are equal to 1.11 s and 0.23 s respectively. For the concrete piers laterally restrained by the presence of gates and steel towers, the fundamental transverse and longitudinal periods are 0.070 s (modal participating mass ratio/MPMR/: 20%) and 0.068 s (MPMR: 47%). A total of 500 Ritz vectors are included in the analyses to reach nearly 100% of effective modal masses in the longitudinal, transverse and vertical directions.

Potential failure planes at the level of rock-concrete interface (base joint) and of the lift joint located at the top of the chute (joint +90 m) are selected as representative for the structures (Fig. B.1.4a). The geometric details and the initial kernel of the analyzed sections (base joint and joint +90 m) are shown in Fig. B.1.4b. To compute performance indicators, the following load combination of *static loads* (SL) and earthquake (E) was investigated: $SL + E_{Long} + E_{Transv} + E_{Vert}$. *Effective sustained dynamic* shear forces, equal to 0.5 multiplying the maximum transient ones, are used to compute the SSF, as justified by Tinawi et al. (2000).

B.1.5.2 Ground Motions

The seismic performance of gated spillways should be assessed considering at least two earthquake intensities (ICOLD 2002, ICOLD 1989): the Operating Basis Earthquake (OBE) and the Maximum Design Earthquake (MDE). The return period (RP) of the OBE could vary approximately from 100 yrs to 200 yrs. ICOLD (1989) mentions that for the OBE the damage should be easy to repair and the dam, appurtenant structures and equipments should remain functional. The MDE has a RP that may vary from approximately 500 yrs to 10 000 yrs or even more depending on the consequences of failure and the tolerance to risk in a particular socio-economic environment (ICOLD 1989, CDA 2007). In this study the RP of the OBE and the MDE were selected as 200 yrs and 2500 yrs, respectively. The corresponding response spectra typical of Ottawa Valley are shown in Fig. B.1.5a (Limoges 2008). To generate spectrum compatible accelerograms in this study a number of realistic Eastern North America Magnitude (M)-Distance (R) scenarios on rock sites were selected for each horizontal spectrum, using data provided by Atkinson and Boore (1995). Then, for each RP, the M-R scenarios for which the spectrum was the closest to the target-spectrum were pre-selected. Orthogonal sets (Longitudinal L, Transverse T and Vertical V) of three artificial ground motions were simulated for each scenario. The methodology used to generate the time histories is similar to the one described in Wanotkorkul and Filiatrault (2005). Following the series of simulations, the ground motions having the best matching response spectra for each RP were retained.

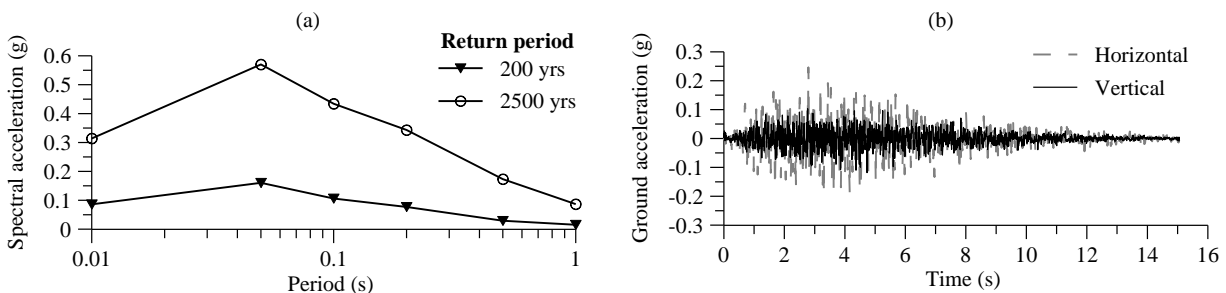


Fig. B.1.5 Ground motions

The records were then adjusted to closely match the target spectra according to an iterative procedure using mathematical reduction or raising of the Fourier series coefficients representing the accelerogram intensities at different frequencies while preserving the phase angle. Fig. B.1.5b presents typical ground motions for the MDE. The peak ground accelerations (PGA) were 0.06g (L or T) and (0.04g) (V) for the OBE; the PGA for the MDE were 0.25g (L), 0.23g (T) and 0.12g (V).

B.1.6 Earthquake response analyses

B.1.6.1 Method 1 (M1) - Pseudo-static

To apply the pseudo-static method, a 3D solid model was developed with a 3D version of the computer program CADAM (CADAM-3D) as shown in Fig. B.1.6 (Leclerc et al. 2003). In this case the seismic inertia forces are computed from the product of the masses and the ground acceleration (seismic coefficient). Westergaard added masses are used to represent the hydrodynamic forces coming from the reservoir. Cracking analyses are first performed only in the us/ds direction with $PGA(L) = 0.06g$ and $PGA(V) = 0.04g$ for the OBE; $PGA(L) = 0.25g$ and $PGA(V) = 0.12g$ for the MDE. Sliding stability analyses are then performed using sustained accelerations taken as half the peak values. The results are given in Tables B.1.2-3.

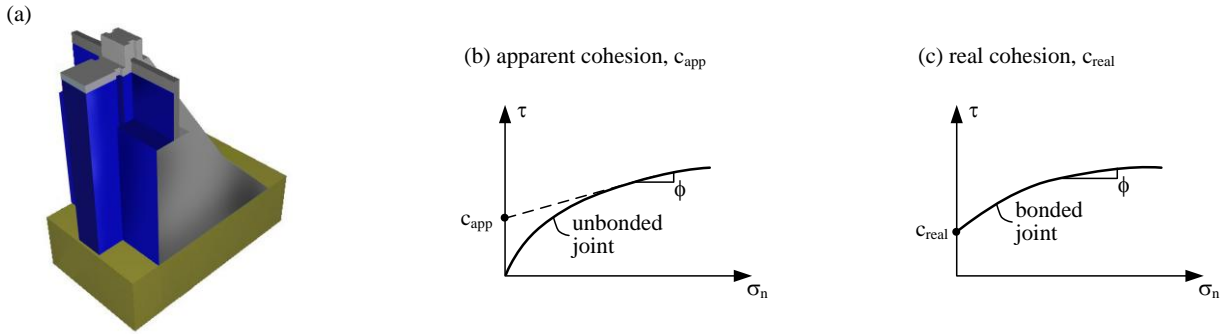


Fig. B.1.6 CADAM-3D Pseudo-static and pseudo-dynamic model

B.1.6.2 Method 2 (M2) - Pseudo-dynamic

To apply the pseudo-dynamic or response spectra method in a simple way, one can use the spectral acceleration $S_a(T)$ at the fundamental period of vibration (T_I) of the structure instead of the seismic coefficient in the pseudo-static method. This procedure will account for dynamic amplification of the inertia forces and is usually conservative because the spectral acceleration $S_a(T_I)$ is multiplied by the total mass of the structure without computing modal participation factors as being done in the classical response spectra analysis (ICOLD 2002). For the pier analyzed (Fig. B.1.6) $T_I = 0.07$ s computed from the FE analysis. In the vertical direction (V) the structure is assumed rigid such that the $PGA(V)$ are used as SaV . The following input spectral accelerations were used in cracking analysis for the OBE: $S_a(T_I)_{us/ds} = 0.12$ g, $SaV = 0.04$ g, and for the MDE $S_a(T_I)_{us/ds} = 0.49$ g, $SaV = 0.12$ g. Sliding stability analyses is then performed using sustained spectral accelerations taken as half the peak values. The results are given in Tables B.1.2–3.

B.1.6.3 FE with 3D Gravity Methods (M3, M4, M5)

The shear forces and moments obtained from the FE analysis (section B.1.5.1) are input to a post-processor to

compute SSF using a 3D extension of the gravity method accounting for concrete cracking (section B.1.3). Three different post-processor analysis methods for the spillway shown in Fig. B.1.4 have been developed. Each of these methods computes differently the area A_{pc} that will be used in (B.1.3) to determine the SSF. It is assumed that apparent cohesion could be lost (either temporarily, M3, or permanently, M4) over the cracked area, because cyclic opening and closing of joints promotes reduced roughness. The permanent loss of c_{app} is a severe assumption that requires further consideration. The uplift pressures are assumed unchanged from their initial pre-seismic values, as it is customary for earthquake analysis. It is accepted that the force resultant could be shortly located outside of the section without overturning (CDA 2007). Consequently, the analysis does not stop even when for a particular time step the section is completely cracked due of the position of the resultant.

B.1.6.3.1 Method 3 (M3) - Without Cumulative Cracking Damage

This method systematically computes the uncracked area and the SSF for each load point (P - M_x - M_y) by using a cracking model without memory (section B.1.4.2). This leads to an "upper limit" of the SSF because the A_{pc} in (B.1.3) has its maximum value. The axial force, P_a , and the shear force, V , are determined with:

$$P_a = \frac{P_{dyn}}{2} + P_{stat} \quad (B.1.4)$$

$$V = \sqrt{\left(\frac{V_{x\ dyn}}{2} + V_{x\ stat}\right)^2 + \left(\frac{V_{y\ dyn}}{2} + V_{y\ stat}\right)^2} \quad (B.1.5)$$

where: P_{dyn} , $V_{x\ dyn}$, $V_{y\ dyn}$, P_{stat} , $V_{x\ stat}$ and $V_{y\ stat}$ are the axial force and the shear forces in x/y direction obtained from the dynamic analysis for any time step, t , ($_{dyn}$ subscript) as well as the static forces ($_{stat}$ subscript). For the base joint, it was assumed that sliding could only take place in the y or the us/ds direction, due to restraint of adjacent monoliths, so the x components of the shear forces were eliminated in (B.1.5).

B.1.6.3.2 Method 4 (M4) - With Cumulative Cracking Damage

A cracking model with memory is employed for this method, as explained in section B.1.4.2. This is the only difference between the method M3 and M4. In this case, the area A_{pc} that enters in (B.1.3) to determine the SSF has a minimum value because a part of the section is eliminated from A_{pc} even when it is in traction for only one time step. Hence, this method is considered a "lower limit" of the SSF. The axial and the shear forces to compute the SSF are also calculated with (B.1.4) and (B.1.5). The section B.1.6.4 discusses the influence of this cracking model.

B.1.6.3.3 Method 5 (M5) - FE with 3D Gravity Method Estimation of Cumulative Damage

The determination of the uncracked area for each time step (method M3 and M4) could be sometimes computationally inefficient. One solution is to use a strategy that decreases the number of points to ≈ 30 , as presented in the section B.1.4.2 and Fig. B.1.3b. Though, in some cases a quick evaluation of the most critical SSF could be interesting. For these cases, the number of computation points should be reduced at minimum. Such evaluation is conservative and severe but it has the advantage of giving a basic overview of the pier condition. If after this preliminary evaluation it is found that the pier does not meet some safety criteria, a more detailed analysis could be conducted (increase the number of calculation points, use M3 or M4, ...).

To obtain the minimum SSF from (B.1.3) the numerator should be minimum and the denominator maximum. The

next relations replace (B.1.4) and (B.1.5) for determination of the axial and the shear force:

$$P_a = 0.3 \cdot \frac{P_{dynmax}}{2} + P_{stat} \quad (B.1.6)$$

$$V = V_{max} \text{ with } V_{max} = \max \left(\sqrt{\left(\frac{V_{x dyn}}{2} + V_{x stat} \right)^2 + \left(\frac{V_{y dyn}}{2} + V_{y stat} \right)^2} \right) \quad (B.1.7)$$

where V_{max} is the maximum calculated shear force of all time steps; the axial resistant force is modified by using the coefficient 0.3 in order to artificially reproduce the non-simultaneity of maximal dynamic loads (axial and shear); the other variables from (B.1.6) and (B.1.7) were already defined in section B.1.6.3.1. The uncracked area is considered at its minimum:

$$A_u = \min(A_{u ex max}, A_{u ey max}, A_{u (ex+ey) max}) \quad (B.1.8)$$

where $A_{u ex max}$, $A_{u ey max}$, $A_{u (ex+ey) max}$ are the uncracked areas computed for the time step where the eccentricity e_x , e_y respectively $e_x + e_y$ are maximal. Hence, the number of load points, for which a non-linear cracking analysis is performed, is reduced from a few thousands to only three. The correlation between the uncracked area and these eccentricities is shown in Fig. B.1.7. One can observe that, the variation pattern of the uncracked area (A_u) is basically the same with the one of either e_x eccentricity (Fig. B.1.7a) or e_y and $e_x + e_y$ eccentricities (Fig. B.1.7b). However, a more detailed study revealed that for some particular situations this correlation is not perfect. Because of that in Fig. B.1.3b[9] a sensitivity test it recommended to ensure that the computed A_u is minimal.

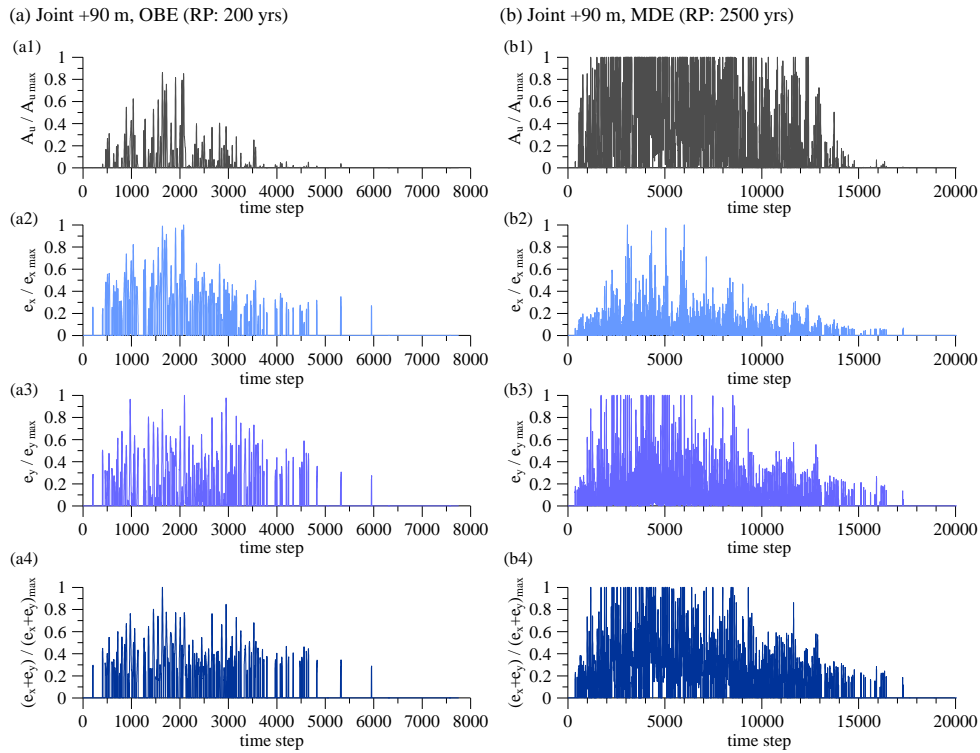


Fig. B.1.7 Correlation between the eccentricities and the uncracked area

B.1.6.4 Structural Response

The structural responses from the earthquake post-processor analyses for the base joint and the joint +90 m are presented in Figs. B.1.8-9 and in Tables B.1.2-3. The part (a) of these figures illustrates the evolution in time of the area, A_{pc} , used in (B.1.3) to compute the SSF, as well as the evolution of the SSF itself for the OBE (Operating Basis Earthquake). The same indicators (A_{pc} , SSF) are displayed in the part (b) with reference to the MDE (Maximum Design Earthquake). In Figures 8-9, the plots (a1), (a2), (b1) and (b2) express the response for the case of a cracking model without memory (M3) while the plots (a3), (a4), (b3) and (b4) apply to a case of a cracking model with memory (M4). Tables (B.1.2 and B.1.3) contain in columns 4 and 5 the area A_{pc} and the cracked area, A_{crk} , respectively, both being computed for the same time step with SSF_{min} . In the next two columns two complementary indicators to qualify the minimum SSF are shown: the number of time steps and the consecutives amount of time for which the SSF is less than 1.

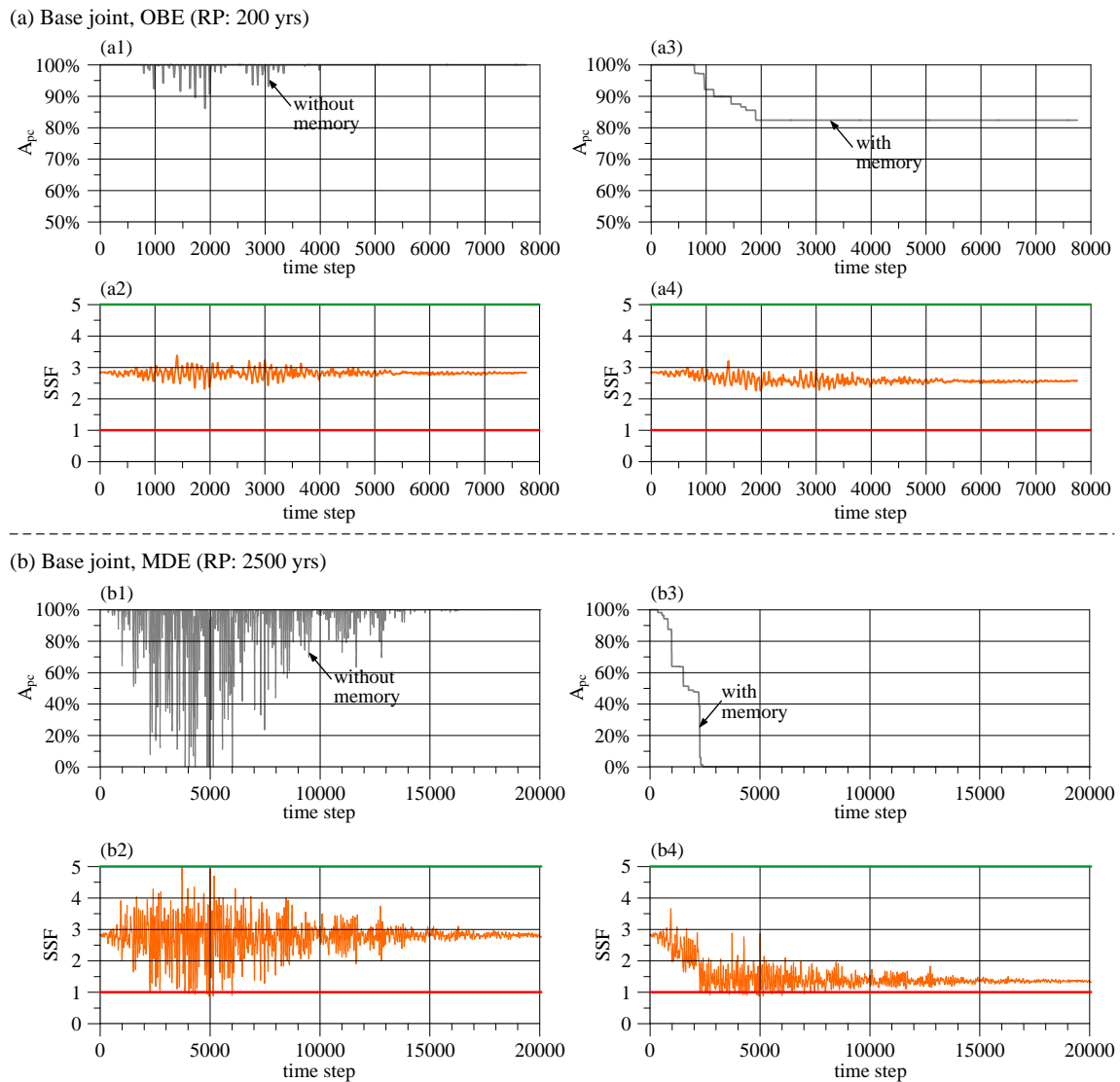
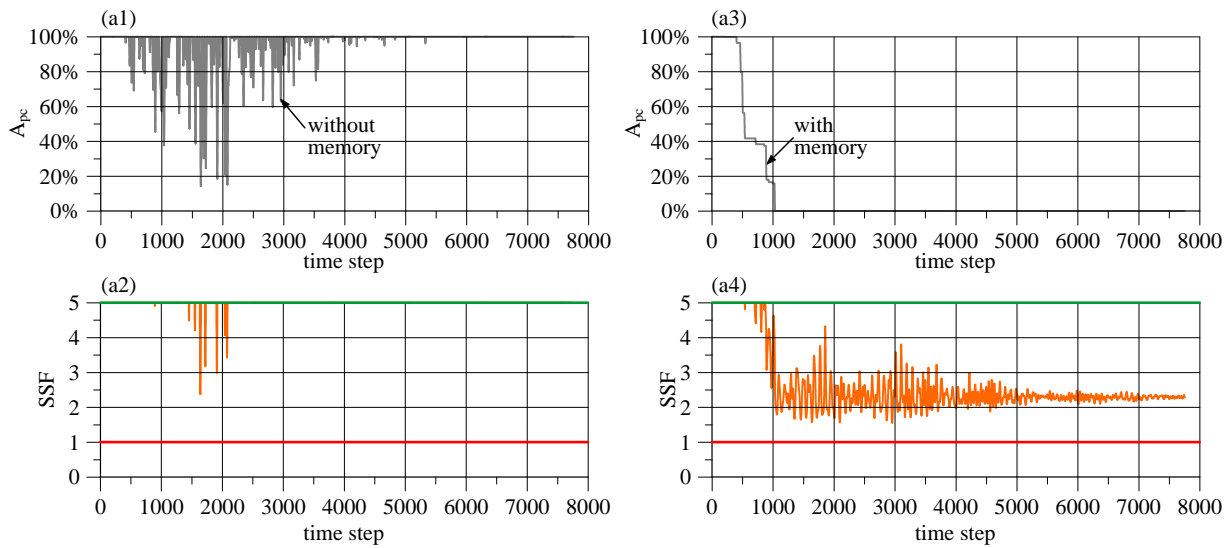


Fig. B.1.8 Earthquake post-processor response analyses for base joint

Table B.1.2 Method comparisons for base joint

EQ	Method	SSF _{min}	A_{pc} for SSF _{min} [%]	A_{crk} for SSF _{min} [%]	Time steps with SSF < 1	Consecutive time with SSF < 1
OBE (RP: 200 yrs)	1	2.46	86.75	13.25	-	-
	2	2.02	69.88	30.12	-	-
	3	2.30	86.07	13.93	0	0
	4	2.25	82.34	9.09	0	0
	5	2.28	86.09	13.91	-	-
MDE (RP: 2500 yrs)	1	0.84	0	100	-	-
	2	0.66	0	100	-	-
	3	0.87	0	100	79 (0.06 sec)	0.012 sec
	4	0.87	0	100	286 (0.22 sec)	0.017 sec
	5	0.82	0	100	-	-

(a) Joint +90 m, OBE (RP: 200 yrs)



(b) Joint +90 m, MDE (RP: 2500 yrs)

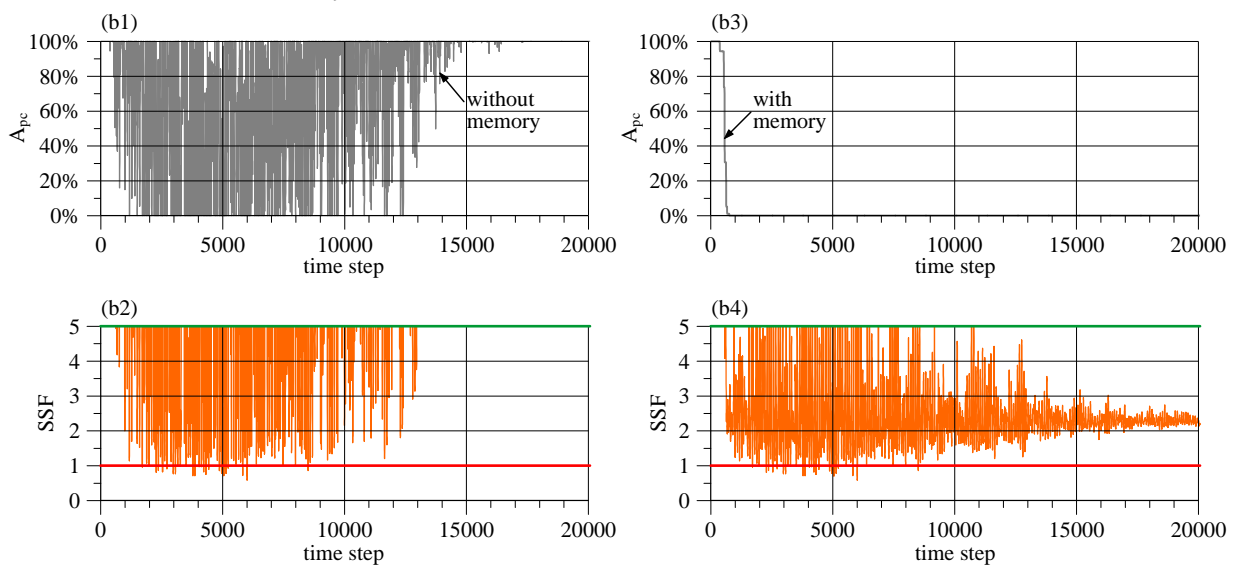
**Fig. B.1.9** Earthquake post-processor response analyses for joint +90m

Table B.1.3 Method comparisons for joint +90 m

EQ	Method	SSF _{min}	A_{pc} for SSF _{min} [%]	A_{crk} for SSF _{min} [%]	Time steps with SSF < 1	Consecutive time with SSF < 1
OBE (RP: 200 yrs)	1	1.70	0	100	-	-
	2	1.52	0	100	-	-
	3	2.38	14.11	85.89	0	0
	4	1.55	0	36.82	0	0
	5	2.44	14.91	85.09	-	-
MDE (RP: 2500 yrs)	1	1.18	0	100	-	-
	2	0.89	0	100	-	-
	3	0.58	0	100	322 (0.24 sec)	0.018 sec
	4	0.58	0	100	323 (0.24 sec)	0.018 sec
	5	0.74	0	100	-	-

A good correlation between the five methods to compute the SSF is obtained for the base joint because in this case the section acts mainly in the us/ds direction, being a part of a massive 3D concrete block. For the joint +90 m, when the 3D action is more important, the difference between the 1D methods (M1, M2) and 3D methods (M3, M4, M5) is obvious; it ranges from a very conservative value, 1.70 vs. 2.38, for the OBE to a non-conservative value for MDE, 1.18 vs. 0.58.

The simplified 3D method M5 proves to be an adequate and conservative estimation of the more advanced methods M3 and M4. As the transient method M4 is a lower bound for the SSF, the results obtained by M5 should be between M3 and M4 and this is actually observed in Tables B.1.2-3. The SSF difference between M3, M4 and M5 in the last line of Table B.1.3 is explained by the presence of the correlation coefficient of 0.3 in (B.1.6); by varying this coefficient for 0.3 to 0.6 this difference significantly decreases. In this context, it is worth noting that the SSF values less than 0.7 (Table B.1.3, MDE, M3-M4) appear only nine times (≈ 0.007 s) for all load points while the total number of points with SSF < 1 in these cases is more than 300. Therefore an important observation could be revealed: the SSF is a useful indicator of the spillway condition, the number of excursion of SSF < 1 could also be employed as a second indicator, however. Moreover a third indicator could be the number of time steps with completely cracked area (100%). This could be noticed by comparing the method M4 for MDE for the base joint and the joint +90m in Figs. B.1.8b1-8b4, 9b1-9b4 as well as the ninth line in Tables B.1.2-3. Thus for practically the same number of time steps with SSF < 1 (286 vs. 323) the section cracking is much more important for the joint +90 m than for the base joint (Fig. B.1.8b1-8b2 vs. Fig. B.1.9b1-9b2).

The fundamental difference between method M3 and M4 is the permanent reduction in the effective area for cohesion, A_{pc} , in the case of M4 which means that the average SSF value changes. For example, if a model with memory is used, Fig. B.1.8b4 the SSF oscillates around a value of 1.25 as compared to 2.5 for a model without memory, Fig. B.1.8b2; moreover the number of excursions with SSF ≤ 1 , promoting residual sliding displacements, could also increase (M4).

The influence of the cracking model could be visualized by comparing plots (a1) vs. (a3) and (b1) vs. (b3) in Figures

8 and 9. For the OBE the section at the base level remains mostly in the elastic range with limited cracking (the cracked area is $\approx 14\%$). In this case, the cumulative cracking damage model, i.e. method M4, gives results that are close to method M3 because the cracked area for all time steps is very limited. If the structure undergoes several oscillatory loading when the section is severely cracked, then the area for which the cohesion is used, A_{pc} , decreased dramatically. This is because for each time step a different part of the section could be cracked and it is eliminated from A_{pc} . The crack openings promote reduction in the apparent cohesion due to a smaller surface roughness, so a conservative approach would be to use zero for the cohesion value, for a part of the section, which is equivalent to extracting a part of the section from the A_{pc} . A cracking model with memory is very conservative if apparent cohesion is present as it rejects a cracked part of the section from A_{pc} even when the cracking occurs for only an isolate time step. A different value, between $A_{pc \text{ with memory}}$ and $A_{pc \text{ without memory}}$, could be furthermore chosen based on complementary indicators (e.g., number and severity of tensile cycles) or the cohesion (real or apparent) could be varied for different parts of the section.

B.1.7 Conclusions

The key objective of the proposed earthquake analysis methodology developed for gated spillways is to provide a rational approach to combine dynamic linear FE analysis and a 3D extension of the gravity method accounting for concrete cracking. Comparisons have been made between the pseudo-static (M1), pseudo-dynamic (M2), and three different approaches (M3-M5) to compute the minimal Sliding Safety Factor (SSF) from the 3D extension of the gravity method. The following conclusions could be drawn from the theoretical developments and their applications in a practical example.

- Simplified 1D pseudo-static (M1) and pseudo-dynamic (M2) methods are useful as preliminary evaluation of the stability condition for joints located at the base of the piers and constrained to us/ds sliding. For upper joints it is advisable to use 3D analysis methods (M3-M5). Moreover, the 3D methods M3 and M4 give the evolution in time of the cracked area and SSF which could be an important indicator in evaluating the piers condition.
- The cohesion (real or apparent) that could be mobilized over a compressed area has a very important contribution to provide resistance against sliding. However, there are a lot of uncertainties regarding the degradation of apparent cohesion upon crack opening-closing cycles. Assuming no degradation of the apparent cohesion an upper bound for the SSF is computed using the instantaneous product of the compressed area and the cohesion (M3). If cyclic opening-closing causes permanent damage reducing the apparent cohesion, a lower bound SSF value is obtained (M4). Assuming $c = 0$, for the entire section, is obviously corresponding to the absolute minimal SSF value, but this is a severe condition. If the reduction in cohesion value is known as a function of crack opening-closing cycles (as given in Tables B.1.2-3) the developed post-processor could take into account a better assessment of the sliding resistance that could be mobilized. The number of crack opening and excursion of $SSF \leq 1$ are useful to judge the severity of induced damage.
- Transient dynamic analysis generates thousand sets of forces (P, M_x, M_y, V_x, V_y) for a typical analysis plane. It is cumbersome to perform systematically a cracking and sliding analysis for each time step and

several analysis planes. A simplified method (M5) was developed to identify the minimal SSF with a much reduced computational effort. The method uses the concept of the maximum eccentricities between the vertical resultant and the centroid of the initial section. The simplified method is useful to estimate the stability condition of piers. However, the results of M5 are sensitive to the correlation factor accounting for simultaneous occurrence of maximum axial and shear forces (0.3 in eq. B.1.6). For the case analyzed a correlation factor of 0.3 yields SSF values close to those computed using cohesion acting on the instantaneous compressed area ($M5 = M3$); a correlation factor of 0.6 yields SSF values close to those computed using the compressed area accounting for cumulative damage ($M5 = M4$). These results are preliminary and could not be generalized from a single case study.

B.1.8 Acknowledgements

The authors wish to acknowledge the financial support provided by the Fond Québécois sur la Recherche en Nature et Technologie and the National Science and Engineering Research Council of Canada.

B.1.9 References

Atkinson, G., and Boore, D. M., 1995. "Ground-motion relations for Eastern North America" *Bulletin of the Seismological Society of America*, Vol.85(1): pp 17-30.

CDA 2007 – Canadian Dam Association, Dam safety guidelines.

CSI (Computers and Structures), 2007. "*SAP2000 User's Manual*": CSI, Berkeley, California, USA.

FERC 2002 – Federal Energy Regulatory Commission, Engineering guidelines for the evaluation of hydropower projects: Gravity Dams.

ICOLD 2002 – International Commission on Large Dams, "Seismic design and evaluation of structures appartenant to dams" *Bulletin no. 123*, Paris, France.

ICOLD 1989 – International Commission on Large Dams, "Selecting seismic parameters for large dams" *Bulletin no. 72*, Paris, France.

Léger, P., 2007. "Reducing the earthquake induce damage and risk in monumental structures: experience at École Polytechnique de Montréal for large concrete dams" *Extreme Man-made and Natural Hazards in dynamics of Structures*, A. Ibrahimbegovic and I. Kozar (editors), Springer, pp.285-309.

Leclerc, M., Léger, P., and Tinawi, R., 2003. "Computer aided stability analysis of gravity dams - CADAM" *Advances in Engineering Software*, Vol.34(7): pp 403-420.

Limoges, A., 2008. "*Seismic safety assessment of gated spillway*", M.Sc.A. thesis, École Polytechnique de Montréal (in French), Canada.

Stefan, L. and Léger, P., 2008. "An extension of the gravity method for 3D cracking analysis of spillway piers including uplift pressures" *ASCE - Journal of Structural Engineering*, Vol.126(4): in press.

Tinawi, R., Léger, P., Lecler, M., Cipolla, G., 2000. "Seismic Safety of Gravity Dams: From Shake Table Experiments to Numerical Analyses" *ASCE - Journal of Structural Engineering*, Vol.134(8): in press.

USACE 1995 – US Army Corps of Engineers, Engineering and design: Gravity dam design, Report EM 1110-2-2200.

Wanotkorkul, A., and Filiatrault, A., 2005. "Simulation of Strong Ground Motions for Seismic Fragility Evaluation of Nonstructural Components in Hospitals" *Technical Report MCEER-05-0005*, Multidisciplinary Center for Earthquake Engineering Research, Buffalo, NY, USA.

B.2 Article c2 : Seismic safety of gated spillways: modeling hydrodynamic pressure on gates

Article publié lors de la Neuvième Conférence Nationale Américaine et dixième Conférence Canadienne de Génie Parasismique, 2010; auteurs : Carlos Melo, Lucian Stefan, Pierre Léger, Lineu Pedroso et Najib Bouaanani, http://www.eeri.org/cds_publications/catalog/product_info.php?products_id=321.

B.2.1 Introduction

When a spillway goes through seismic excitations, gates and piers vibrate. These vibrations can cause large inertia forces and related distortions in piers and gates. Special attention should be devoted to the seismic assessment of gated spillways because gate operations could be compromised after a moderate earthquake, or gates could fail in a large seismic event. However, dam safety guidelines lack recommendation on how to model seismically induced hydrodynamic pressures on gate-pier systems (FERC 2002, USCOLD 1995).

It is known that the use of Westergaard's added mass theory, which is most often used to assess hydrodynamic forces, can lead to inadequate results because it does not take into account the shape and flexibility of the gate-pier interacting system (Adya 2008, Aslam et al. 2002).

This paper develops and compares different modeling strategies to assess hydrodynamic forces acting on typical piers and gates of an existing spillway built in 1933. The results obtained for a model which considers the structure as a rigid body using the seismic coefficient (pseudo-static) method are compared to (pseudo-dynamic) response spectra models which take into account the gate and pier flexibilities so as to evaluate the accuracy of Westergaard's theory (Bouaanani et al. 2003). For that, finite element analyses using 3D beam-columns and shell elements were performed to assess the maximum base shear. At first, an evaluation considering a single pier with two half gates was carried out. Then a model of three piers and two gates is analyzed so as to investigate the pier-gate-fluid interactions.

A key question is to determine if in the case of flexible structures, hydrodynamic thrusts of gates and piers (a) will be acting in phase, thus being directly additive in time or (b) will be out of phase with some cancellation (Tinic et al. 1994). A special attention is devoted to identify the dynamic characteristics of each model (periods of vibration, and related mode shapes). Parametric analyses are then conducted for sinusoidal ground excitations with different frequency contents as well as ground motions typical of Eastern and Western North American conditions. It is shown that (a) mode shapes of gates and piers are decoupled if a hinge connection is used between the gate and the pier, (b) reductions in hydrodynamic thrusts are generally obtained when the gate and the pier are modeled separately using either added masses or fluid elements as compared to the added mass lumped pier-gate model. Finally, a finite element model of a flexible gate interacting with compressible fluid elements in a coupled fluid-structure analysis for the spillway analyzed indicates that Westergaard added masses provide an upper bound for seismically induced hydrodynamic forces.

B.2.2. Seismic safety assessment of gated spillways

Seismic analysis of concrete dams and spillways could be performed with a progressive methodology divided in four basic analysis levels of increasing complexity (Stefan et al. 2008). These are shown in Table B.2.1: (1) the pseudo-static (seismic coefficient method), (2) the pseudo-dynamic (response-spectra) method, (3) linear or nonlinear transient dynamic finite element methods, and (4) the transient rigid body dynamic method for cracked components. It is important to maintain consistency in modeling assumptions while comparing the results from one type of analysis to another. Obviously as the fundamental period of the structure tends to zero (rigid structure), the results of response spectrum or transient dynamic analysis should tend to the results obtained from the pseudo-static method (seismic coefficient).

Table B.2.1 Progressive approach for seismic stability

Method	Excitation	Dynamic Characteristics	Response
1. Pseudo-static (seismic coefficient)	PGA (cracking) Sustained Acc. (stability)	Mass, Infinite stiffness (No dyn. amplification)	Non-oscillatory Equivalent static
2. Pseudo-dynamic (response-spectra)	Design spectra Peak (cracking) Sustained (stability)	Mass, Stiffness, Damping (Dyn. amplification)	Non-oscillatory Max. probable
3. Dynamic (FE) (Lin. / Non-Lin.)	Accelerogram	Mass, Stiffness, Damping (Dyn. amplification)	Oscillatory History (+ / -)
4. Dynamic (Rigid body)	Accelerogram	Mass, Restoring force (friction, inelastic impact)	Oscillatory

B.2.3 Modeling seismic hydrodynamic pressures on flexible gates

The added-mass arising from dam-water interaction during earthquake ground acceleration was assessed using the formulation proposed by Westergaard. The formulation considers a dam with a vertical upstream face accelerated at its base as a rigid body with a continuous infinite length reservoir. Due to the infinite stiffness of the dam, the acceleration along the structure was considered constant and equal to the acceleration of the foundation. Westergaard showed that the hydrodynamic pressures exerted on the face of the dam due to the earthquake ground motion is

equivalent to the inertia forces of a body of water attached to the dam and moving back and forth with the dam while the rest of the reservoir water remains inactive. The suggested variation for this body of water is parabolic with a base width equal to 7/8 of the height. The equation proposed by Westergaard for the hydrodynamic pressure assessment is shown in Eq. (B.2.1):

$$p = \frac{7}{8} \cdot \rho \cdot H \cdot \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{0.5} \cdot a_g \quad (\text{B.2.1})$$

where ρ is the water density, H is the reservoir height, z is the height from the base, and a_g is the ground acceleration. The total force F , caused by the hydrodynamic pressure, is obtained by multiplying the hydrodynamic pressure, p , by tributary area A_i , corresponding to each node in the upstream side of the finite element model of the dam. Noticing that $F = m \cdot a$, the added mass in each node of the upstream side is given by (all symbols are already detailed):

$$m_{Ai} = \frac{7}{8} \cdot \rho \cdot H \cdot \left(1 - \frac{z}{H}\right)^{0.5} \cdot A_i \quad (\text{B.2.2})$$

The main parts of a typical gated spillway structure (piers and gates) have quite different dynamic properties due to important difference in their flexibility (the piers being much stiffer than the gates). The hydrodynamic model for a spillway should therefore differ to some extent from that of a rigid dam. Various hydrodynamic models for pier-gate systems based on the Westergaard theory are possible, as detailed on the next paragraph (e.g., the gate Westergaard masses can be added on pier or on gates). Moreover, the influence of the reservoir on the dynamic response of the spillway can be further investigated by using finite elements software that considers the fluid-structure interaction.

B.2.4 Hydrodynamic model for analyzed gated spillway

The gated spillway analyzed (Fig. B.2.1) was built in 1933 and is located in Canada. It is ~ 300 m long and 10.82 m high. It comprises twenty 6.1 m x 12.4 m Stoney-roller gates each weighting 352 kN and resting on a raft foundation. The bridge and the railroad situated on the upper part of the structure weight 82 kN and 680 kN, respectively.

Two models were used to compute the dynamic response of the pier-gate-reservoir system (Fig. B.2.2). Both models were built with the computer program SAP2000 (CSI 2009). The first structural model, *M1*, representing a single pier has 14 vertical and 13 horizontal beam-column elements (Fig. B.2.2a). As the properties of the sections vary, vertical elements have different properties according to the section that they represent. The foundation flexibility is modeled using equivalent springs. The second structural model, *M2*, has 168 shell elements which were added to *M1* for modeling the gates (Fig. B.2.2b). The connection between the piers and the gates is pinned. To simulate the presence of the neighboring piers and gates, which are not modeled, equivalent springs were added in both ends on x direction.

For each model (*M1* and *M2*), four mass modeling methods for piers and gates were studied: (a) only pier self-mass is employed; (b) pier self-mass and pier Westergaard masses; (c) pier and gate self-mass (no Westergaard mass); (d) self-mass and Westergaard masses for both piers and gates. Thus, for example *M2b* is the model having 3 piers and 2 gates (Fig. B.2.2b) with pier self-mass and Westergaard masses (no gate mass). Model *M1d* is frequently used in

engineering practice. The masses on gates were treated the same way as those of the pier (Eq. B.2.2).

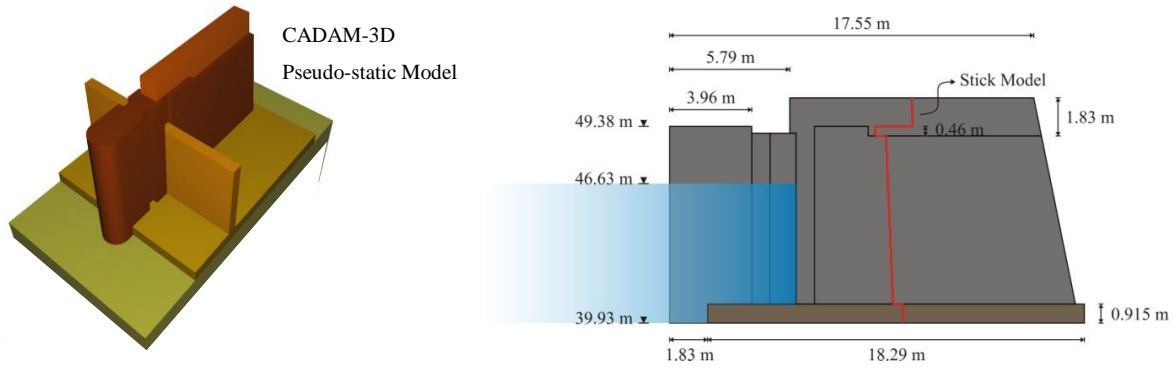


Fig. B.2.1 Analyzed gated spillway

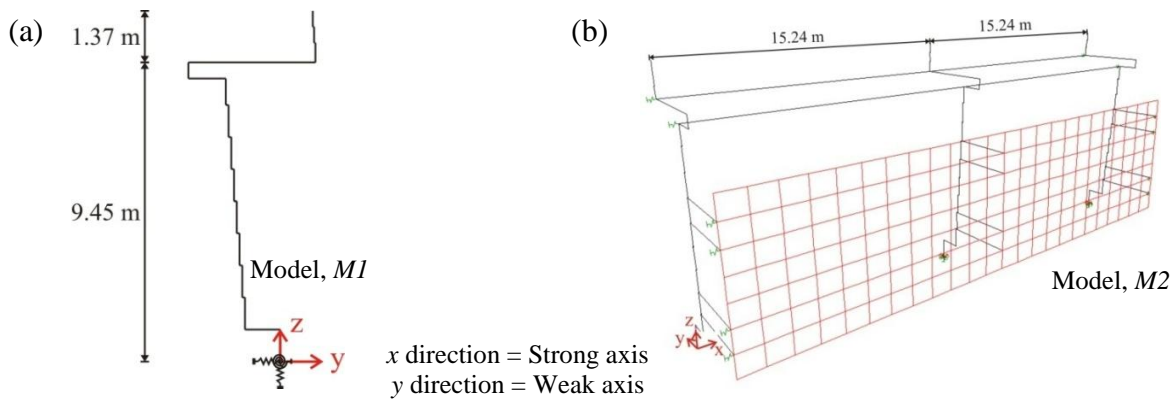


Fig. B.2.2 Models for analyzed spillway: (a) *M1*: one pier, and (b) *M2*: three piers with two gates

B.2.5 Dynamic characteristics of spillway model

Fig. B.2.3 illustrates the first four vibration modes of the spillway pier alone (model *M1c*, Westergaard masses were disregarded on pier and gates). The modal participation mass ratios (MPMR) for the first and 2nd mode in *y* direction (weak axis) are 74% and 20%, respectively, for a total of 94%. The period for the 2nd mode in *y* (weak axis) is ~ 0.007 s. Figure B.2.4 depicts the first vibration mode in *y* direction for gate and pier (model *M2d*). The period and modal participation ratios for two versions of the complete model *M2* (*M2c* and *M2d*) are shown in Table B.2.2. The dynamic behavior of the spillway pier is practically the same (MPMR $\approx 90\%$ for *y* mode 1 and 2) regardless of the number of modeled piers. For example, the first *y* mode of *M2c* (3 piers) is represented by two *y* modes (number 26 and 28 with the same period, Table B.2.2), corresponding to the central and extreme piers, adding up to $\sim 75\%$ of mass participation (for the first mode of *M1c*, MPMR = 74%). The same situation is observed for the 2nd *y* mode (modes 75 and 76, Table B.2.2).

Table B.2.2, indicates that added masses change only the periods and the MPMR for the gates, but not for the piers. The ratio of the added masses (266 ton) and the self-mass (36 ton) of the gate is 7.39. This large ratio explains why the gate is more sensitive to the added masses. The influence of added masses on the dynamic properties of the pier is small, as the ratio of the added masses (52 ton) and its self-mass (1320 ton) is only of 0.04. The dynamic characteristics of the pier-gate system are largely dominated by those of the pier. The reason for the higher MPMR

ratio of the piers ($> 85\%$ no matter the model) can be (a) the uncoupled dynamic behavior of the pier-gate system due to the important difference in their flexibility, and (b) the quotient between the total mass of the gate and that of the pier: $(36+266) / (1320+52) = 0.22$. For some structures, it is possible to decompose the eigenmodes into two vectors belonging to degrees of freedom (DOF) of different parts of the structure; these two vectors have non null elements for one part of the structure and mutually zero elements for the other part. In the case of a spillway the decomposition can read: $\Phi^T = [\Phi_P; 0]^T + [0; \Phi_G]^T$, where Φ^T is the complete eigenmode, Φ_P and Φ_G are the vector components for the pier's and for the gate's DOF. For computing the base shear (BS), one can prove that for this kind of eigenmodes the influence of the forces applied on one structural part will be null on the other. However, for real structures the decomposition is never perfect; there are small but non-null coupling elements. By carefully observing the mode shapes of the analyzed spillway it was concluded that they have a form that permits the decomposition. Thus, this particular form can explain the uncoupled dynamic behavior of the pier-gate system and the small influence of the gate's added masses on the BS computation of spillways exhibiting decoupled pier and gate mode shapes.

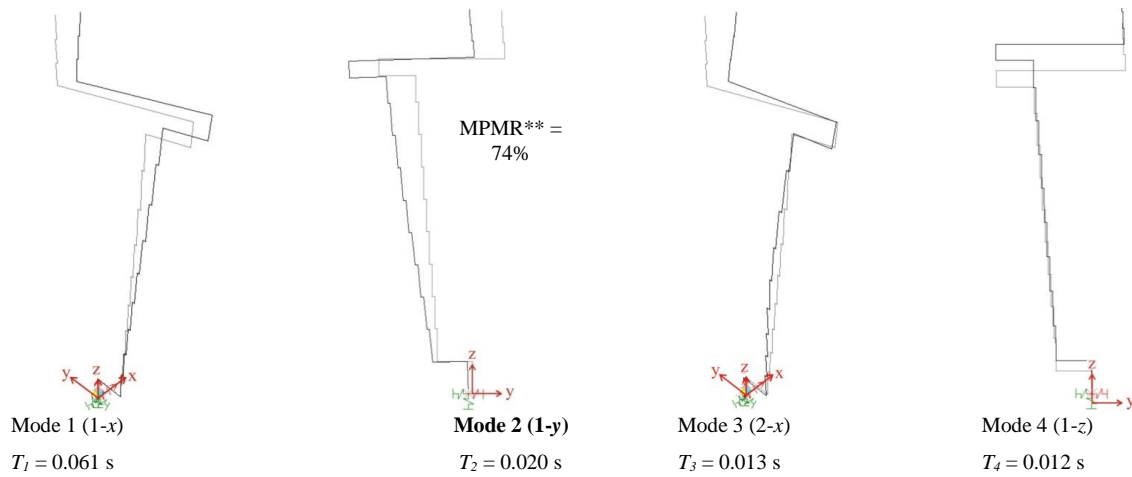


Fig. B.2.3 Mode shapes of the pier (model *M1c*)

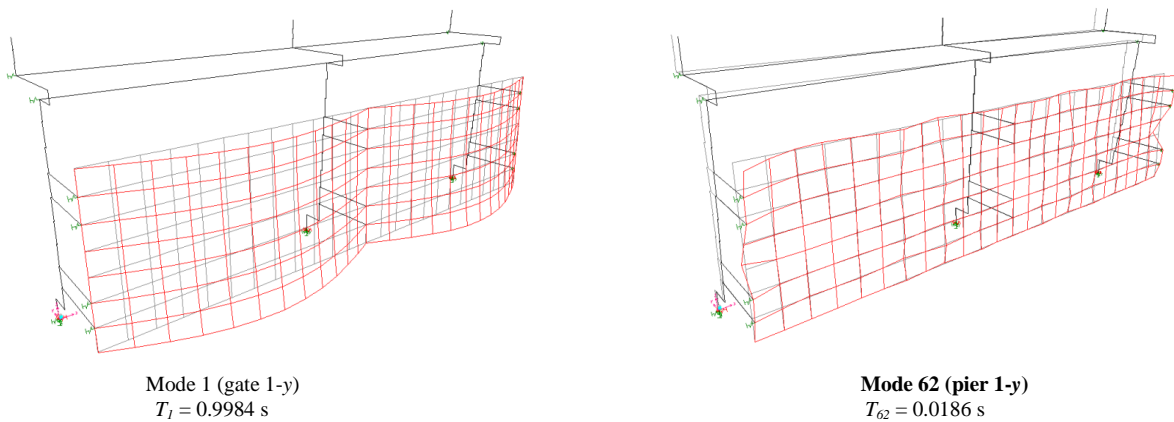


Fig. B.2.4 Mode shapes of the spillway (model *M2d*)

Table B.2.2 Dynamic characteristic of models *M2c* and *M2d*.

Model <i>M2c</i> (Σ MPMR > 90%)			Model <i>M2d</i> (Σ MPMR > 90%)		
Mode No.*	Period (s)	MPMR**	Mode*	Period (s)	MPMR**
26 (pier)	0.0185	53%	62 (pier)	0.0186	44%
28 (pier)	0.0184	25%	60 (pier)	0.0187	25%
76 (pier)	0.0067	10%	1 (gate)	0.9984	9.7%
75 (pier)	0.0066	5.6%	110 (pier)	0.0069	8.9%
1 (gate)	0.3436	1.4%	109 (pier)	0.0068	4.8%

* Mode number; **MPMR = modal participation mass ratio in y (upstream/downstream) direction.

B.2.6 Earthquake response analysis

The earthquake response of the spillway was evaluated by performing four types of analysis with increasing level of complexity: pseudo-static (this analysis does not account for dynamic amplification), pseudo-dynamic, spectral and time history analyses. The seismic analyses are performed in upstream/downstream (us/ds) direction with a peak ground acceleration $PGA = 0.25g$. To apply the pseudo-static method, a 3D solid model was developed with the computer program CADAM-3D (Leclerc et al. 2003). The seismic inertia forces are computed from the product of the masses and the ground acceleration (seismic coefficient). For pseudo-dynamic analysis (CADAM-3D), the spectral acceleration $Sa(TI)$ at the fundamental period of vibration of the structure, TI , is used instead of the seismic coefficient in the pseudo-static method (TI was obtained from the FE model). This procedure is usually conservative as the spectral acceleration $Sa(TI)$ is multiplied by the total mass of the structure without computing modal participation factors as in the case of the classical response spectra analysis (USCOLD 1995). Five ground motions were considered for the linear elastic and spectral and time-history analyses (5% viscous damping): (a) two sinusoidal signals (5 Hz and 10 Hz); (b) an El Centro record (Imperial Valley, California - 1940); (c) a high frequency ground motions record spectrally matched to National Building Code of Canada (NBCC) design spectrum for Ottawa Valley; and (d) a record of the Saguenay earthquake (Québec, Canada - 1988). If necessary, the signals were scaled to obtain a PGA equal to $0.25g$ (Fig. B.2.5). The spectral analysis was carried out using the complete quadratic combination (CQC) rule. The time history analysis was performed with an integration time step of $7.5 \cdot 10^{-4}$ s. The maximum base shear obtained in the pseudo-static, pseudo-dynamic, spectral and linear time-history analyses is shown in Table B.2.3. By comparing the maximum BS for all eight hydrodynamic models (*M1a* to *M2d*), a difference of less than 5% was noticed between all models except *M1d*; the difference between *M1d* and all other models being $\sim 20\%$. The explanation can be found in the important difference of dynamic characteristics of piers and gates producing many cancellations on BS computation or a different dynamic amplification (a dynamic separation of the response, Fig. B.2.5). The simplified model *M1b* shows practically the same BS as *M2d* ($\sim 2\%$ difference). However, *M2d* being the most complete model, it was selected for comparison in Table B.2.3 with model *M1d* (frequently used in practice).

To investigate the influence of Westergaard added masses on gates, the results obtained for a model where no

Westergaard masses were added on gates ($M2c$) is compared with the results of the model containing masses on both piers and gates ($M2d$). Only a slight difference was found between the maximum BS (V_{max}) computed for these models (Table B.2.4). However, as the maximum BS is an indicator of the global spillway performance, the local influence of added masses on gates can be more important. Moreover, the phase shift, influenced by the damping properties of the structure, can play a role in the time distribution of the response.

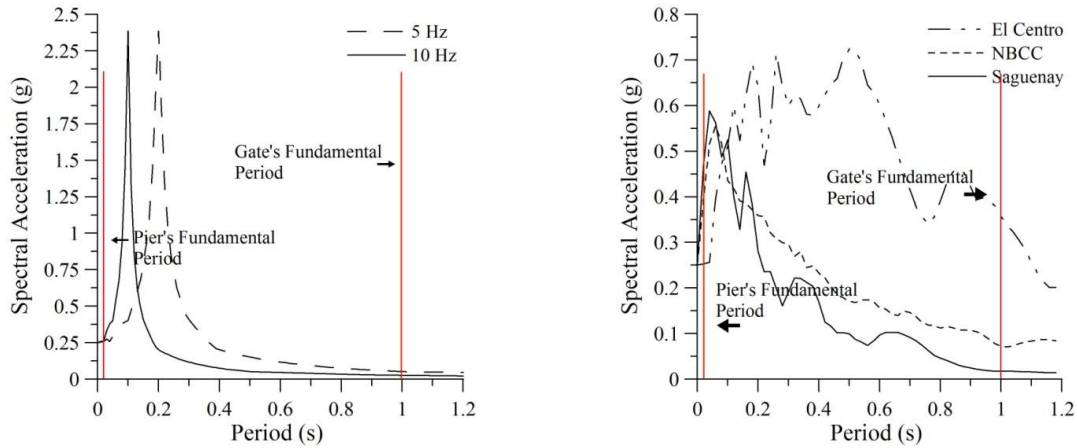


Fig. B.2.5 Acceleration response spectrum for 5% damping

Table B.2.3 Base shear forces, V_{max} , for the pseudo-static, pseudo-dynamic, spectral and linear time-history analyses (Westergaard masses on gates).

Excitation	Pseudo-static (CADAM-3D) [kN]	Pseudo-dynamic (CADAM-3D) [kN]	Spectral (kN)		Linear Time History (kN)	
			1 pier ($M1d$)	3 piers ($M2d$)	1 pier ($M1d$)	3 piers ($M2d$)
Sine 5Hz		3937	3401	2838	4089	3507
Sine 10Hz		4046	3556	2852	4422	3499
El Centro	3902	3904	3591	3007	4471	3713
Saguenay		4885	5012	4037	5642	4782
NBCC		6751	6562	4864	5892	5992

Table B.2.4 Influence of Westergaard added mass on gates for pier response: linear time-history analysis (model $M2d$ vs $M2c$).

Excitation	V_{max} kN		Difference (%)
	$M2d$ with added mass	$M2c$ no added mass	
Sine 5Hz	3507	3498	0.25
Sine 10Hz	3499	3524	-0.71
El Centro	3713	3687	0.70
Saguenay	4782	4778	0.08
NBCC	5992	5997	-0.08

B.2.7 Fluid-structure interaction analysis

A simplified Fluid-Structure Interaction (FSI) analysis of a wall-gate-reservoir system was also carried-out in this work to investigate the influence of water compressibility and gate flexibility. Figure B.2.6 illustrates the finite

element model built with the software ANSYS (2007) and used to conduct the FSI analysis. The gate's dimensions are the same as previously ($L_s=12.18$ m, and $H_s=6.4$ m). The wall is assumed rigid and is extended to $3L_s$ laterally on each side of the gate and the reservoir is truncated at a distance $L_r=15H_s$ from the wall upstream face. The wall and the gate were modeled using 3D solid and shell finite elements, respectively, and the reservoir using potential-based fluid finite elements. Zero pressure boundary conditions are imposed at the surface and upstream end of the reservoir, while rigid boundary conditions implying null hydrodynamic pressure gradients are imposed on the lateral sides of the reservoir (Bouaanani and Lu 2009). The obtained first four vibration periods of the coupled wall-gate-reservoir system are given in Table B.2.5 as well as the periods of the gate without reservoir.

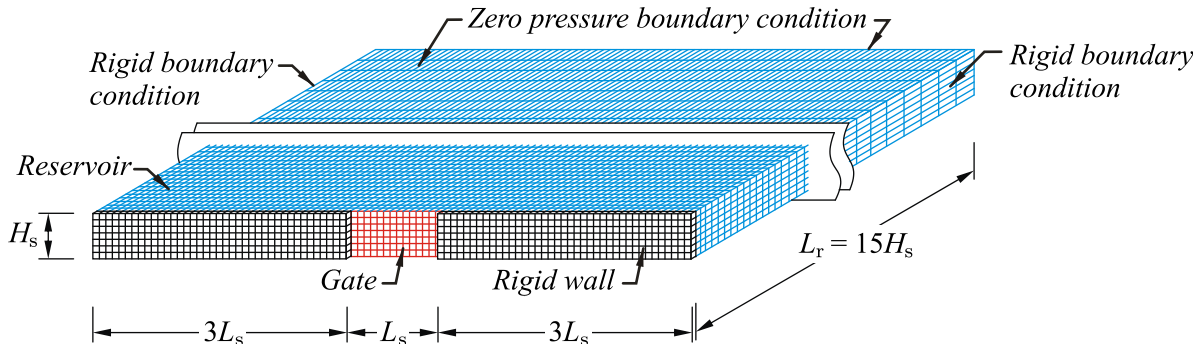


Fig. B.2.6 Finite element model of the wall-gate-reservoir system used for FSI analysis

For purpose of comparison, a simplified analysis where the reservoir hydrodynamic loading is included using Westergaard added masses [Eq. (B.2.2)] lumped to the wall-gate finite element nodes was also conducted. Table B.2.5 shows the vibration periods obtained and the corresponding Westergaard total added mass assuming a rigid gate. The total added masses M_i^* corresponding to each vibration mode of the gate were determined using the simplified equation proposed by Blevins (1979):

$$M_i^* = \left[\left(\frac{f_i^{uncoupled}}{f_i^{coupled}} \right)^2 - 1 \right] M_{gate} \quad (B.2.3)$$

where $f_i^{uncoupled}$ is the vibration frequency of the gate without reservoir (in vacuum), $f_i^{coupled}$ is the frequency of the coupled gate-reservoir system obtained using FSI analysis, and M_{gate} is the mass of the gate.

Comparing the results obtained for the uncoupled (gate only) and coupled (wall-gate-reservoir) structures, confirms that Fluid-Structure interaction significantly increases the vibration periods of the system because of the added mass associated with vibrating water in contact with the gate. Table B.2.5 also indicates that vibration periods obtained using Westergaard formulation are higher than those from FSI analysis because water compressibility and gate flexibility are included in the latter case. Similar trends were obtained in other studies (Barbosa 2008, Ribeiro et al. 2009). For each of the four vibration modes in Table B.2.5, this effect is evidenced further by the Square Root of the Sum of the Squares (SRSS) where total added mass which is found higher when using Westergaard theory, i.e. 290 t,

as compared to the formulation [Eq. (B.2.3)] (278t) including the effect of water compressibility coupled with the vibration mode of the flexible gate.

Table B.2.5 Frequencies and added masses for the models studied.

Mode	Period (s)		Added mass (t)		
	Gate	Wall-gate-reservoir (FSI)	Wall-gate-reservoir (Westergaard)	Westergaard [Eq. (B.2.2)]	Blevins [Eq. (B.2.3)]
1	0.3424	0.9041	1.0368		214.25
2	0.1237	0.2261	0.3393	290	84.04
3	0.0845	0.1867	0.2616	(a single value)	139.43
4	0.0520	0.0897	0.1415		71.13
SRSS				290	278

B.2.8 Conclusions

Dam safety guidelines lack specific recommendations of how to model hydrodynamic pressures on gates. It is shown herein that the gate flexibility plays a significant role in estimating the driving shear forces to be resisted by the piers. Lumping Westergaard added masses of the pier-gate system only on the pier can be an appropriate method for an upper bound evaluation of the maximum base shear for the pier. Several dynamic analyses were performed with two models, the first considering a single pier (with two half gates) and the second one being composed of three piers and two gates. It was determined that the dynamic response of the pier is more realistically modeled when the added masses on the gates are neglected. The limited participation of the gate's masses on the dynamic response of the pier is because the hydrodynamic loads on the gates and piers act out of phase with some cancellation, thus not being directly added in time. A simplified fluid-structure interaction analysis of a wall-gate-reservoir system was conducted to highlight the effects of water compressibility and gate flexibility on the dynamic response. The results confirmed that hydrodynamic effects increase the vibration periods of the system and that Westergaard formulation overestimates the added masses on the gate.

The seismic loads on spillways are greater when considering the Westergaard theory for added masses being lumped for the gate to the pier for the system analyzed. However, this kind of analysis may not be able to capture the effects of resonance, occurring in a certain frequency range, of typically coupled flexible spillway-reservoir system. In such cases finite element analysis accounting for fluid-structure interaction would be more appropriate.

B.2.9 Acknowledgements

The authors wish to thank the Canadian Bureau for International Education, Department of Foreign Affairs and International Trade Canada (DFAIT) for its Grant Students' Exchange Program (SEP) for the financial support provided to the first author while conducting research at École Polytechnique de Montréal, Québec, Canada, as well as the financial resources provided by the National Science and Engineering Research Council of Canada (NSERC).

B.2.10 References

Adya, A., 2008. FE modeling and numerical simulation for dynamic analysis of gravity dam spillway, *The 14th World Conference on Earthquake Engineering*, Beijing, China.

ANSYS, 2007. Documentation for ANSYS, ANSYS Academic Research, Release 11.0.

Aslam, M., E. L. Wilson, M. Button, and C. Ahlgren, 2002. Earthquake analysis of radial gates/dam including fluid-structure interaction, *22nd USSD Annual Meeting and Conference*, San Diego, California.

Barbosa, A. N., and L. J. Pedroso, 2008. A study of static and dynamic coupling of structures through an acoustic medium. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Engineering Computational Technology*, ed. M. Papadrakakis, and B. H. V. Topping, paper 100. Stirlingshire: Civil-Comp Press.

Bouaanani, N., P. Paultre, and J. Proulx, 2003. A closed-form formulation for earthquake-induced hydrodynamic pressure on gravity dams. *Journal of Sound and Vibration* 33, 573-582.

Bouaanani, N., and F. Lu, 2009. Assessment of potential-based fluid finite elements for seismic analysis of dam-reservoir systems. *Journal of Computers and Structures*, Vol. 87, No. 3-4, 206-224.

CSI (Computers and Structures), 2009. *SAP2000 User's Manual*, CSI Inc., Berkeley, California.

FERC (Federal Energy Regulatory Commission), 2002. *Engineering guidelines for the evaluation of hydropower projects: Gravity Dams*, www.ferc.gov.

Leclerc, M., P. Léger, and R. Tinawi, 2003. Computer aided stability analysis of gravity dams – CADAM, *Advances in Engineering Software* 34 (7), 403-420.

Ribeiro, P. M. V., C. A. E. Melo, and L. J. Pedroso, 2009. Semi-analytical solution of dam-reservoir interaction in the fundamental mode shape, *Solid Mechanics in Brazil*, São Paulo, Brazil.

Stefan, M., A. Limoges, and P. Léger, 2008. Three-dimensional seismic stability evaluation of spillway structures considering concrete cracking, *CDA Annual Conference*, Canada.

Tinic, S., V. Langer, and P. Eyer, 1994. Seismic safety evaluation of an old weir in Switzerland, *10th European Conference on earthquake Engineering*, Vienna, Austria.

USCOLD (US Committee on Large Dams), 1995. *Guidelines for earthquake design and evaluation of structures appurtenant to dams*, Denver, Colorado.

B.3 Article c3 : Cracked section analysis of gravity dams including passive reinforcement and uplift pressures

Article publié lors du Congrès annuel de l'Association canadienne des barrages, 2010; auteurs : Lucian Stefan, et Pierre Léger, http://www.cda.ca/cda_new_en/publications.

B.3.1 Introduction

There exist several small concrete gravity dams or spillway piers, usually smaller than 7 m in height, that have been constructed with passive steel reinforcement (anchors) to ensure their structural stability for usual (ice), unusual, and extreme (flood and earthquake) load combinations, Figure B.3.1(a). It is also possible to consider passive anchors in the construction of new small dams (for larger dams post-tension anchors are used). There is a lack of widely accepted computational methods to assess the safety of lightly reinforced hydraulic structures. The classical safety factors for concrete gravity dams based on allowable stress consideration and widely used by the profession were developed based on beam theory and global equilibrium (CDA 2007). However, there is no direct way to include the effect of passive reinforcement in the evaluation of these factors. This paper presents a methodology for sectional analysis and safety factors computation of arbitrary cracked sections of gravity dam accounting for concrete cracking, the presence of passive anchors, and uplift pressures (UP), Figure B.3.1(b). Three performance criteria are examined (1) cracking, (2) sliding, and (3) compression (crushing). Three solution strategies are developed for the flexural response (a) analytical (limited to one anchor), (b) iterative nonlinear force equilibrium, and (c) equilibrium equations in terms of geometrical properties. A spreadsheet program (GM-Dam) based on the second solution strategy has been developed and is made available to the profession.

The structural shear strength is evaluated by summing the shear resistance of concrete (friction and cohesion) and the shear resistance of reinforcements working as anchors. A case study of a real dam anchored with passive reinforcement is presented. It illustrates the effect of reinforcements on cracking response, on shear strength and on safety factors as well as the computational steps of the proposed methodology. One can describe the role of passive reinforcements as: (a) an increase of compressed area on the section as well as of compression resultant; (b) a decrease in the UP; and (c) additional sliding and overturning strength by dowel action and mechanical anchor effect of the bars.

B.3.2 Stability of small gravity dams without anchors

The present developments are done within the scope of the gravity method as described in CDA (2007). For sectional analysis we assumed that plane section remains plane after deformation, and that the material laws are followed. In structural mechanics there are three basic principles to accept a valid solution for internal forces (stresses) computed from a structural analysis of a dam-foundation-reservoir system (a) the solution must be in equilibrium, (b) the compatibility of deformations must be respected and (c) the material law must be followed. Of course some of these assumptions can be relaxed within the context of more elaborated modelling procedures using finite elements (FE). However, the use of FE for nonlinear (cracking) coupled hydro-mechanical problem is complex. The proposed

procedure can be seen as an extension of the gravity method to analyse dams with passive reinforcement. FE analysis can be used in a second phase, if deemed necessary.

Figure B.3.2(a) indicates the typical behaviour of unreinforced concrete dams subjected to an increase of hydrostatic (horizontal) loads. For the usual load combination the resultant must stay within the middle-third of the section and the effective stresses at the dam-foundation interface are in compression, Figure B.3.2(a1-a2). As water level is increased the resultant is outside of the middle-third. If the interface possesses tensile strength, the stress distribution is depicted in Figure B.3.2(a3); if not, cracking is taking place, UP must be updated in the cracked region and the stress distribution is shown in Figure B.3.2(a4). Figures B.3.2(a5-a6) indicate the stress behaviour as the water level is increased. Complete cracking can occur as the resultant is outside of the section. Figure B.3.2(c1) indicates a typical cross-section, while Figure B.3.2(c2) indicates the variation in toe compressive stresses with increasing eccentricity e_y . Very large e_y (near $h/2$) are possible before σ_c reach significant value as compared to f'_c .

B.3.3 Stability of small gravity dams with passive anchors

In the case of small gravity dams with passive anchors, we propose a solution that respects equilibrium, Figure B.3.2(b). Thus, the summation of vertical forces (including updated UP), horizontal forces, and bending moments of a free body diagram for analysed dam must be zero. The compatibility of deformations is ensured by the assumptions concerning the deformed geometry (plane section remains plane). The following material laws are used (a) no-tension material for concrete, (b) linear stress distribution for anchor. The maximum tensile stress in steel and compressive stress in concrete are smaller than the yielding point or compressive strength (this is verified within the solution strategy).

One should compare Figure B.3.2(a7) with Figure B.3.2(b7). For unreinforced section, Figure B.3.2(a7), equilibrium is not possible when the resultant is outside of the section; however, for reinforced section, Figure B.3.2(b7), equilibrium is possible even if the resultant is outside of the section. The tensile steel stress and compressive concrete stress are relatively small, Figure B.3.2(c3-c4), and very far from their limit stress (f_y, f'_c). It is thus obvious that to take full benefit of the tensile force developed in the anchor the criterion that the resultant must remain within the section (for dam without reinforcement) is no longer applicable for dams with reinforcement. Hence, it is not appropriate to use the performance criterion of unreinforced dams (cracking, position of the resultant) for a reinforced dam.

B.3.3.1 Failure mechanisms

In a dam safety assessment, it is required to identify all potential damage and failure mechanisms that could occur to the dam-foundation-reservoir system analyzed under the usual, unusual and extreme (flood and earthquake) loading conditions. The structure is considered “safe” if it meets specific criteria defined to ensure an adequate safety margin for each failure mechanism considered (cracking, sliding, and compression/crushing).

The following failure mechanisms have to be considered for small gravity dams with passive anchors:

- (a) Excessive (i) direct tension, (ii) direct shear, and (iii) tensile-shear force interaction of the anchors;

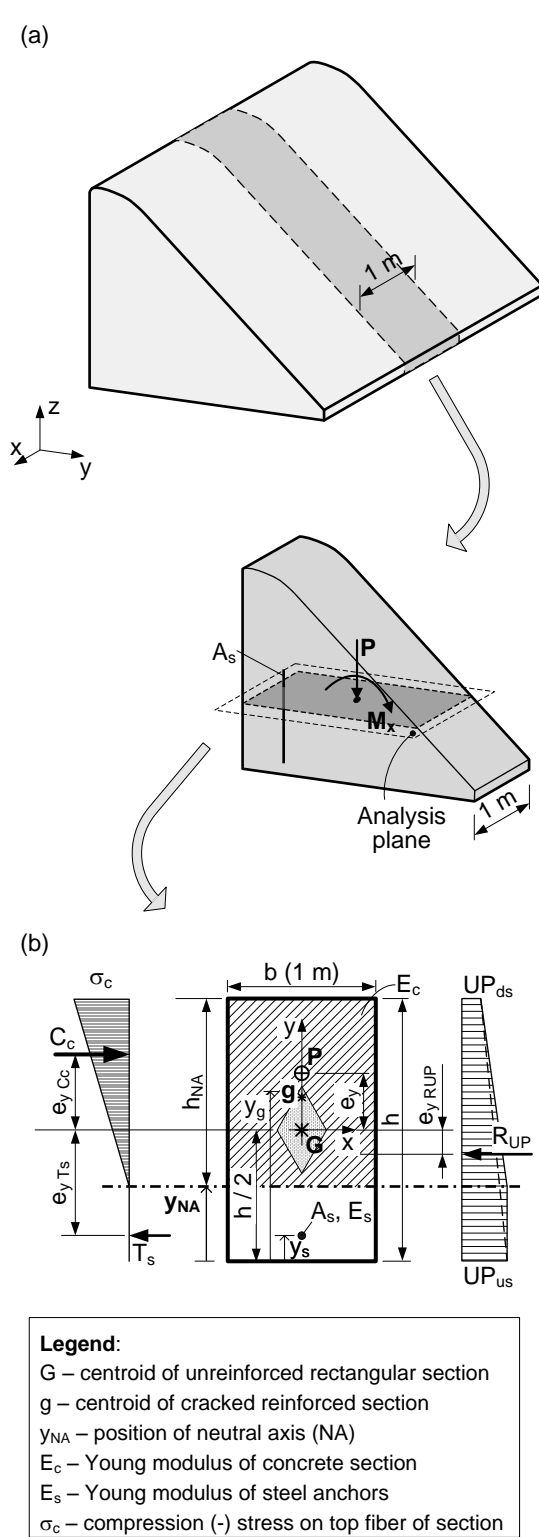


Fig. B.3.1 Flexural analysis for dams:
 (a) computational model, and (b) sectional analysis

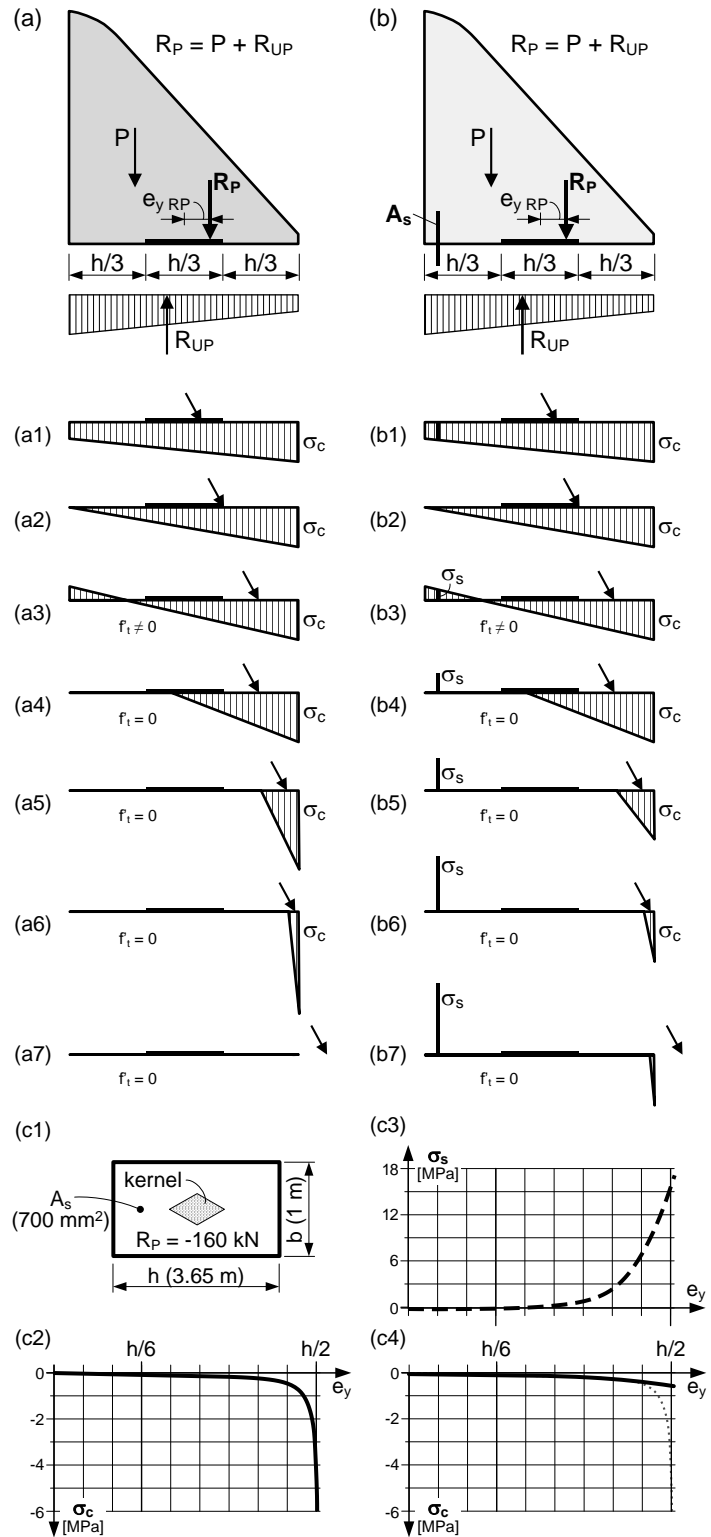


Fig. B.3.2 Response of unreinforced (a), and reinforced (b) section, and stress variation (c) for different eccentricities

- (b) Inadequate development length of the anchor (shear failure along the grout-steel interface, or the grout-rock interface); for smooth steel anchor the cohesive steel-concrete bond strength can be estimated as $c=0.04 \cdot f'_c$ as recommended by FERC (1997), Figure B.3.3(a);
- (c) Inadequate uplifting resistance; the weight of the pull-out cone of rock assuming a 45° angle from the presumed anchorage point near the anchor extremity must be sufficient to develop the tensile force in the bar. In the case of multiple anchors, the interaction between individual rock cones for each anchor must be considered to compute the effective pull-out resistance (Wyllie 1999).

The use of passive anchors presents also some additional concerns. A first objection is that a small amount of displacement is required to induce axial and shear forces in the anchors (USACE 2005). However, the steel tensile stress intensity is very small such that normal displacements will be also very small. Relative shear displacements could also be very small to develop significant dowel resistance because of the high anchor shear stiffness. It is inappropriate to assume that displacement large enough to apply the shear friction concept is applicable to a system that is to respond mainly in the elastic range. Cheng (1996) indicates that cracks with opening less than 0.2 mm can heal autogenously - this is the case for concrete-concrete crack. In the case of concrete-rock interface crack this value is certainly less (0.1 mm or less). Ziari and Kianoush (2009) performed an experimental investigation of flexural cracking and leakage in RC liquid containing structures. Concrete cracking is admissible and it is shown that the compressive zone in flexure is able to ensure water tightness. This does not preclude concerns about durability that is linked mainly to deterioration due to corrosion.

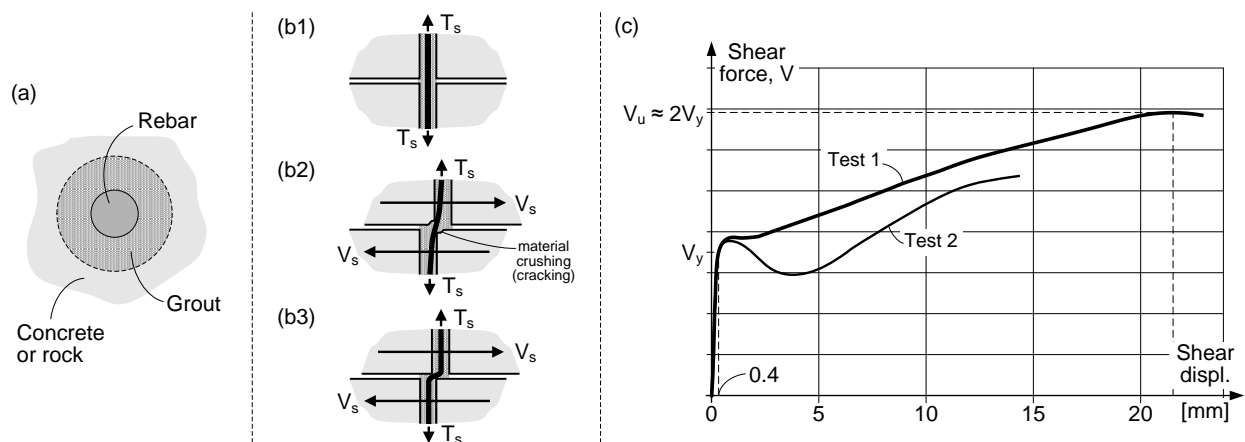


Fig. B.3.3 Failure mechanism and shear response of anchors: (a) anchor cross-section, (b) failure mechanism by tension (b1), material crushing (b2), and tensile-shear interaction (b3), and (c) shear-displacement response of typical anchor

The safety assessment of dams with post-tension anchors subjected to corrosion (including the phenomenon of corrosion under tension) has received a lot of attention from the dam engineering community. Non destructive testing methods to assess the anchors residual strength were developed. The problem is not different for passive anchors. In existing dams some assumptions could be made to define an effective steel area. In dams to be constructed, it might

be wise to install some additional (dummy) anchors for corrosion control. These bars are not required for stability. A core sample of the dam foundation interface could be extracted from the downstream face to assess the actual anchors conditions. Fatigue has also been discussed; however, the induced stress levels as well as the stress variations (due to water level fluctuation, seasonal temperature variations, and ice loads for dams located in northern regions) are low.

B.3.3.2 Flexural Response

The sectional analysis of reinforced sections uses the working stress design (WSD) approach based on the same hypotheses as an unreinforced section (see B.3.2). We consider that the applied forces have “y” eccentricity, the generalization for two eccentricities (biaxial bending) being direct. According to WSD, the modular ratio n is defined as $n=E_s/E_c$, Figure B.3.1. This ratio is used to transform the composite section into a homogenous one having concrete Young modulus E_c , (Wang et al. 2007); e.g., the composite area of reinforcement bar in tension is $n \cdot A_s$, A_s =bar area (if A_s is in compression the composite area is $(n-1) \cdot A_s$ to account for the concrete area replaced by A_s). The centroidal Cartesian system of the cracked section is employed to compute the geometrical properties of the section as well as the planar σ_z stress distribution (the section is supposed symmetric):

$$\sigma_z = \frac{P}{A} + \frac{M_x}{I_x} \cdot y \quad (\text{B.3.1})$$

In (B.3.1), P =axial resultant force; $M_x=P \cdot e_{yt}$ bending moment about x axis, with e_{yt} =the eccentricity of P with respect to the centroid of the cracked section; A , I_x , are the centroidal geometric properties of the composite section: the area, and the x moment of inertia; the origin of Oy axis is the centroid of cracked section, thus, it changes with the evolution of cracking; the neutral axis (NA) is expressed by the distance y_{NA} measured between the NA position and the bottom of the section. By identifying the NA one can compute the composite geometrical properties, and normal stresses using equation (B.3.1). If the section is cracked the NA position can not be known a priori and a nonlinear strategy is generally used. The finding of the NA can be seen as the solution of a system having two equations (the equilibrium equations) with two unknowns, y_{NA} and σ_c (Figure B.3.1):

$$\begin{cases} \sum P(y_{NA}, \sigma_c) = C_c + T_s - P - R_{UP} = 0 \\ \sum M_x(y_{NA}, \sigma_c) = C_c \cdot e_{yCc} + T_s \cdot e_{yTs} - P \cdot e_y - R_{UP} \cdot e_{yRUP} = 0 \end{cases} \quad (\text{B.3.2})$$

In (B.3.2) the variables with $_{UP}$ indices are related to uplift pressures (UP), Figure B.3.1(b). For steel bars in compression the resultant, C_s , of these bars must be added in (B.3.2). There are three different strategies, found in literature, to solve the above system: (a) analytically, (b) nonlinear with equations in terms of forces, and (c) nonlinear with equations in terms of geometrical properties. These strategies are detailed in the following paragraphs. As an application, the same example (E1, Figure B.3.1) is solved with each strategy in turn; the input data (for all solution strategies) are: $b=450$ mm, $h=1000$ mm, $E_c=25000$ MPa, $A_s=700$ mm², $y_s=30$ mm, $E_s=200000$ MPa, $P=-80$ kN, $e_y=0.25$ m (measured from G, Figure B.3.1(b)), $UP_{us}=0.021$ MPa, $UP_{ds}=0.0015$ MPa, $u=1$, $v=1$, $n=8$.

B.3.3.2.1 Analytical solution for rectangular section

Analytical solutions are limited to simple sections (rectangular), applied forces (P , M_x) and one reinforcement bar (rebar). The analytical solution for rectangular *unreinforced* section is:

$$y_{NA} = \frac{6 \cdot e_y - h \cdot k_u}{k_u + k_d + v \cdot (k_u - k_d)}; \sigma_c = \frac{2 \cdot (P + u \cdot R_{UP})}{b \cdot (h - y_{NA})}; C_c = \frac{h - y_{NA}}{2} \cdot b \cdot \sigma_c; e_{yC_c} = \frac{y_{NA}}{3} + \frac{h}{6} \quad (B.3.3)$$

Furthermore, for the case of rectangular *reinforced* section (one rebar) y_{NA} is the solution of a third degree equation:

$$C_1 \cdot y_{NA}^3 + C_2 \cdot y_{NA}^2 + C_3 \cdot y_{NA} + C_4 = 0 \quad (B.3.4)$$

$$\sigma_c = \frac{2 \cdot (P + u \cdot R_{UP}) \cdot (h - y_{NA})}{b \cdot (h - y_{NA})^2 + 2 \cdot n \cdot A_s \cdot (y_s - y_{NA})}; \sigma_s = \sigma_c \cdot n \cdot \frac{y_s - y_{NA}}{h - y_{NA}}; T_s = \sigma_s \cdot A_s; e_{yT_s} = y_s - \frac{h}{2} \quad (B.3.5)$$

In (B.3.3), (B.3.4) and (B.3.5) several notations were introduced (see also B.3.3.2 and Figure B.3.1(b)):

$$k_u = 1 + u \cdot \frac{b \cdot h \cdot UP_{us}}{P}; k_d = 1 + u \cdot \frac{b \cdot h \cdot UP_{ds}}{P}; k_{ua} = u \cdot \frac{n \cdot A_s \cdot UP_{us}}{P}; k_{da} = u \cdot \frac{n \cdot A_s \cdot UP_{ds}}{P} \quad (B.3.6)$$

$$u = \begin{cases} 0, & \text{if } UP = 0 \text{ or they are ignored} \\ 1, & \text{if } UP \neq 0 \text{ (} UP > 0 \text{ always)} \end{cases}; v = \begin{cases} 0, & \text{if } UP \text{ are independent of cracking} \\ 1, & \text{if } UP \text{ are updatable, function of cracking} \end{cases} \quad (B.3.7)$$

and the coefficients C_1, C_2, C_3, C_4 are given in Appendix. The UP resultants as functions of y_{NA} are:

$$R_{UP} = \left(\frac{UP_{us} + UP_{ds}}{2} \cdot h + v \cdot \frac{UP_{us} - UP_{ds}}{2} \cdot y_{NA} \right) \cdot b; e_{yRUP} = \frac{R_{M_x UP}}{R_{UP}} \quad (B.3.8)$$

$$R_{M_x UP} = - \frac{(UP_{us} - UP_{ds}) \cdot b}{12} \cdot (h^2 - v \cdot (2 \cdot y_{NA}^2 - y_{NA} \cdot h)) \quad (B.3.9)$$

In eqs. (B.3.3)-(B.3.9) it is assumed that the reinforcement is in tension and the top fiber, where UP_{ds} is defined, is in compression. These equations are valid for all cases of UP variation: UP can be ignored ($u=0, v=0$), fixed ($u=1, v=0$), or modifiable to account for the penetration of fully pressurised water in the crack in progress ($u=1, v=1$). Thus, for example if $u=0$ ($v=0$) then $k_u=k_v=1, k_{ua}=k_{da}=0$ and y_{NA} for unreinforced section is $3 \cdot e_y - h/2$. It can be observed that y_{NA} is always independent of the actual value of P (being only dependent of the ratio UP/P where $u=1$). This observation is very important because it means that *the existence of a solution* and the NA position are *independent* of the value of P being dependent only of its position e_y . The value of P is important only for the computation of normal stresses σ_c and σ_s .

Analytical solution strategy for example E1 (see B.3.3.2). From (B.3.3)-(B.3.9): $k_u=0.8819, k_d=0.9916, k_{ua}=-0.00147, k_{da}=-0.00011, C_1=0.79246 \text{ m}, C_2=-1.86661 \text{ m}^2, C_3=1.39703 \text{ m}^3, C_4=-0.27957 \text{ m}^4$, which gives $y_{NA}=0.3149 \text{ m}$ (the sole real solution), $\sigma_c=-0.4845 \text{ MPa}, \sigma_s=1.6116 \text{ MPa}, R_{UP}=6.44 \text{ kN}, e_{yRUP}=-0.1267 \text{ m}, C_c=-74.68 \text{ kN}, e_{yC_c}=0.2716 \text{ m}, T_s=1.13 \text{ kN}, e_{yT_s}=-0.47 \text{ m}$; it is easy to check that the equilibrium equations (B.3.2) are satisfied:

$$\sum P = -74.68 + 1.13 - (-80) - 6.44 = 0, \text{ and } \sum M_x = -74.68 \cdot 0.2716 + 1.13 \cdot (-0.47) - (-80) \cdot 0.25 - 6.44 \cdot (-0.1267) \approx 0.$$

B.3.3.2.2 Equilibrium equations in terms of forces (EETF)

The idea of this strategy is to suppose a NA and σ_c and to check the equilibrium equations (B.3.2). To simplify, the rebar is considered punctiform and the tension resultant is applied in its centroid. The simplification is not true for rebars having large diameter or for embedded steel parts but gives good results for most practical cases. To avoid the difficulty of choosing simultaneously two unknowns (y_{NA}, σ_c), we recall that the NA position does not depend on P ,

only σ_c being function of P (see B.3.3.2.1), which allow to put $\sigma_c=-1$ at the beginning. The algorithm has 3 steps: (i) suppose a NA, fix $\sigma_c=-1$ and compute with the first equation of (B.3.2) the resultant $P_t=C_c+T_s$, eqs. (B.3.3), (B.3.5); (ii) compute the actual σ_c as the ratio between $-(P+R_{UP})/P_t$, eqs. (B.3.8); (iii) with actual σ_c scale C_c , T_s , and check the second equilibrium equation: if it is fulfilled then stop; if not go to (i). This strategy is general and simple but has an important drawback for “manual” implementation: there is no information on how to choose y_{NA} or how to continue in the case where y_{NA} was not well chosen and UP are modifiable. For these situations a standard nonlinear scheme (Newton-Raphson, ...) is appropriate but it can be unstable (Stefan and Léger 2010).

EETF solution strategy for example E1 (see B.3.3.2). By following the above mentioned steps: (i) suppose $y_{NA}=0.3149$ m (the analytical solution), $\sigma_c=-1$ MPa, compute the resultants $C_c=-154.15$ kN, $T_s=2.33$ kN and $P_t=-154.15+2.33=-151.82$; (ii) $R_{UP}=6.44$ kN, $\sigma_c=(-80+6.44)/-151.82=-0.4845$ MPa; the equilibrium is, thus, satisfied (iii) $\sum M_x = 0.4845 \cdot (-154.15 \cdot 0.2716 + 2.33 \cdot -0.47) - (-80) \cdot 0.25 - 6.44 \cdot -0.1267 \approx 0$.

B.3.3.2.3 Equilibrium equations in terms of geometrical properties (EEGP)

This strategy is general, robust, easy to implement in spreadsheet software, makes no assumption on rebars and gives information on how to continue the process to reach the convergence (Stefan and Léger 2008). However, the disadvantage is that for each iteration the geometrical properties of the cracked sections must be computed. The main idea is: (i) suppose a NA; (ii) compute with this NA the section properties and UP; (iii) if the new NA computed with $y_{NA}=-I_x/(A \cdot e_{yt})+y_g$ is equal to supposed NA then stop, else use the new NA as supposed NA (e_{yt} = eccentricity of axial resultant with respect to the centroidal coordinate system of the cracked section, y_g =the centroid coordinate of the cracked section measured from the bottom of the section). The nonlinear schemes (Newton-Raphson, ...) can be used for finding the supposed NA but as pointed out before they can be unstable.

EEGP solution strategy for example E1 (see B.3.3.2). First, we suppose a NA that is not the solution:

- (i) $y_{NA}=0.25$ m;
- (ii) geometrical properties: $A=b \cdot (h-y_{NA})+n \cdot A_s=450 \cdot (1000-250)+8 \cdot 700=0.3431 \text{ m}^2$, $y_g=(b \cdot (h-y_{NA}) \cdot (y_{NA}+h)/2+n \cdot A_s \cdot y_s)/A=(450 \cdot 750 \cdot 1250/2+8 \cdot 30 \cdot 700)/343100=0.61529 \text{ m}$, $I_x=b \cdot (h-y_{NA})^3/12+b \cdot (h-y_{NA}) \cdot ((y_{NA}+h)/2-y_g)^2+n \cdot \pi \cdot r_s^4/4+n \cdot A_s \cdot (y_s-y_g)^2=450 \cdot 750^3/12+450 \cdot 750 \cdot (1250/2-615.29)^2+8 \cdot \pi \cdot ((700/\pi)^{1/2})^4/4+8 \cdot 700 \cdot (30-615.29)^2=0.0177708 \text{ m}^4$, $R_{UP}=6.16$ kN, $e_{yRUP}=-0.1336$ m, $e_{yt}=(P \cdot e_y+R_{UP} \cdot e_{yRUP})/(P+R_{UP})+h/2-y_g=(-80 \cdot 0.25+6.16 \cdot -0.1336)/(-80+6.16)+1000/2-615.29=0.16671$ m;
- (iii) $y_{NA}=-I_x/(A \cdot e_{yt})+y_g=-1.77708 \cdot 10/(343100 \cdot 0.16671)+615.29=0.3046$ m (new proposed NA).

By starting the new iteration with $y_{NA}=0.3046$ m and doing another 3 iterations the solution $y_{NA}=0.3149$ m is found; for the solution, the geometrical properties are: $A=0.3139 \text{ m}^2$, $y_g=0.6463$ m, $I_x=0.014224 \text{ m}^4$, $R_{UP}=6.44$ kN, $e_{yRUP}=-0.1267$ m, $e_{yt}=0.13675$ m, $y_{NA}=-1.4225 \cdot 10/(313900 \cdot 0.13675)+646.3=0.3149$ m, which is the supposed NA. The equilibrium equations can be easily checked with (B.3.2)-(B.3.5) but this is not really necessary as the equation (B.3.1), used inside this solution strategy, is already based on the equilibrium.

Observation. The NA is dependent only of the axial resultant position but not of its actual value, as previously mentioned. The value of axial force plays a role on the computation of normal stresses. The axial loads applied to hydraulic structures are in general negligible comparing with the capacity in compression of the gross cross-section ($A_g f'_c$). Ultimate normal stresses in concrete ($0.85 f'_c$) and rebars (f_y) are practically never reached in real hydraulic structures as they do in regular reinforced concrete elements. The materials (concrete and steel) remain largely in their elastic domain. When the section has tensile resistance, only a small fraction of the section capacity is needed to resist combined biaxial loads (P, M_x). For an unreinforced section, if the axial resultant falls outside of the section then the section is completely cracked and no solution is possible. This cracking is *not* due to a *large axial force* but to a large eccentricity. In other words, the capacity of the unreinforced section is *not exceeded* but the solution cannot be found. Thus, the role of added anchor is not to help the section to resist large compressive forces but to *insure* that a *solution is found* by developing adequate flexural resistance, Figure B.3.2. Conceptually, it is more adequate to see the anchor bar as providing an “artificial tensile resistance” for the concrete than as rebars permitting the section to attain its ultimate strength. The tensile resistance allows the section to balance important moments due to *small axial loads* having *large eccentricities*. From eqs. (B.3.3) and (B.3.5) it is seen that the normal stress σ_c is proportional to the axial resultant; it is logic to expect small normal stresses and axial displacements for small axial loads *when* the solution is possible. Thus, the rebar conserves important reserves strength for working in shear, helping the section to transfer shear forces.

B.3.3.3 Shear Response

There are three main shear strength mechanisms to resist the horizontal driving shear force from hydrostatic (earthquake) horizontal forces in small dams with passive anchors: (a) shear strength provided by the anchors, (b) shear strength provided by concrete friction (computed from the integral of the compressive stresses leading to the compressive force resultant, C_c , multiplied by the friction coefficient, $\mu = \tan \phi$, where ϕ is the friction angle), and (c) concrete cohesive stress in the compressed zone, if prior cracking did not take place along the compressed (uncracked) ligament. Figure B.3.3(a) indicates a typical anchor cross-section with grout encasing. Figure B.3.3(b) indicates three failure mechanisms for the anchor. Shear forces, V_s , is taking place simultaneously with tensile force, T_s . In a first approach, one could investigate the abundant literature from anchor bolts resistance in rock mechanics where several experimental and numerical results have been reported (Azuar et al. 1979, Bjurstrom 1974, Hass 1976, Lorig 1985, Pells 1974, St-John and Van Dillen 1983, UDEC 2004).

Figure B.3.3(c) indicates a typical experimental shear-force displacement response for a grouted rock bolt (adapted from Azuar et al. 1979). It is shown that very small displacements are required to mobilize significant shear force. In this case the ultimate shear strength, V_u , is nearly twice the shear yielding value, V_y . In the application of passive reinforcement for dams, it is inappropriate to consider the ultimate strength because of the significant shear displacement required to mobilize it. It is also inappropriate to consider the concept of shear friction requiring large shear displacements. Bjurstrom (1974) presents a shear strength formula for ungrouted anchors in granite discontinuities also documented in the computer program UDEC (2004). This formula includes the bearing strength of the anchor surrounding material (compressive strength of rock). However, it is based on tests where significant

shear displacements are taking place.

In a second, approach the steel code is used to estimate the shear strength of the steel anchor, V_r : $V_r = 0.66 \cdot \phi \cdot A_s \cdot f_y = 0.66 \cdot 0.85 \cdot A_s \cdot f_y = 0.56 \cdot A_s \cdot f_y$, where ϕ =material strength reduction factor for rebars (CISC 2004).

In a third approach, the concrete code is used to estimate V_r : $V_r = \phi_s \cdot 0.6 \cdot R \cdot A_s \cdot f_{tu} = 0.85 \cdot 0.6 \cdot 0.65 \cdot A_s \cdot 1.9 \cdot f_y = 0.63 \cdot A_s \cdot f_y$, where ϕ_s =steel embedment material resistance factor for reinforcement, R =shear resistance modification factor (the value for brittle steel was selected because the yield plateau may be uncertain and the surrounding concrete is not confined); and $1.9 \cdot f_y$ is the recommended value to estimate the ultimate strength (CSA 2004). However, in ASTM A615M standard for steel reinforcement it is stating to use $f_{tu} = 1.5 \cdot f_y$ for Grade 60 (420) bars (ASTM 2004). Thus, using $1.5 \cdot f_y = f_{tu}$ leads to $V_r = 0.5 \cdot A_s \cdot f_y$. We analysed the experimental data from grouted rock bolts from Azur et al. (1979) to obtain $V_r = 0.5 \cdot A_s \cdot f_y$. This last value is coherent with those of CISC (2004) and CSA (2004).

We thus suggest the value of $V_r = 0.5 \cdot A_s \cdot f_y$ as a starting point in a dam safety assessment with passive anchors. It was additionally verified from the experimental data (Azuar et al. 1979) that $V_r = 0.5 \cdot A_s \cdot f_y$ leads to very small shear displacements (Figure B.3.3(c)). It is also important to verify that the anchor is located at a sufficient distance from the upstream face to avoid bearing, secondary cracking and tear edge failure. The effectiveness of anchors should not be reduced by an inadequate spacing (too close or too large). To these ends, recommendations formulated in the Canadian Concrete Code for anchors in concrete are useful (CSA 2004).

To assess the integrity of the anchor, one needs to compute the applied tensile, T_s , and shear force, V_s , that are induced by the applied loads including UP. The value of T_r (the tensile strength) is adapted from CSA A23.3-04 $T_r = A_s \cdot \phi_s \cdot f_{tu} = A_s \cdot 0.85 \cdot 1.5 \cdot f_y \cdot 0.7 = 0.9 \cdot A_s \cdot f_y$, where R is a tensile resistance modification factor (CSA 2004). Then, the following shear-tensile interaction formula should be verified: $(T_s/T_r)^{5/3} + (V_s/V_r)^{5/3} \leq 1$. Most often, the tensile-shear interaction mechanism is not a problem because T_s is much smaller than T_r . In fact, in CSA A23.3-04 it is indicated that the *full resistance in shear* is permitted if $T_s/T_r \leq 0.2$ ($T_s \leq 0.18 \cdot A_s \cdot f_y$ or $\sigma_s \leq 0.18 \cdot f_y$ as $\sigma_s = T_s/A_s$).

For unreinforced and reinforced section the proposed equation for the Sliding Safety Factor (SSF) is:

$$SSF = \frac{C_c \cdot \tan \phi + c \cdot A_c + V_r}{V} \quad (B.3.10)$$

where C_c =the integral of concrete compressive stresses (triangle), A_c =the concrete area for which the cohesion is considered, V_r =the rebar contribution to shear resistance of the section, V =the applied shear force, and the other variables were previously defined. The SSF, eq. (B.3.10), has the same form with the one for unreinforced section because, if no bar are present, $V_r = 0$ and $P + R_{UP} = C_c$. For reinforced section, due to the presence of rebars the compression in concrete, C_c , does not equal anymore $P + R_{UP}$: $P + R_{UP} = C_c + T_s$ (T_s is the traction on the section). Hence, the compression force that should multiply $\tan \phi$ in eq. (B.3.10) is no longer $P + R_{UP}$ being replaced by C_c .

B.3.4 Computational tool for flexural analysis: GM-DAM

Standard nonlinear strategies have many advantages when applied to *regular* nonlinear problems; they are simple, quick, exact, and general. For hydraulic structures at the beginning of the nonlinear process, the system of equation for which the solution is searched is not completely defined due to the presence of unknown UP. Thus, the formulation being *irregular* several stability problems can arise and the finding of a solution is uncertain. One of the main drawbacks of standard nonlinear schemes is theirs “black box” characteristic: if the process diverges, there is no information about the reason of the divergence. It is not possible to know if: (a) there is a solution but it was not found by the algorithm; (b) there are multiple solutions; or (c) there is no solution. These three answers are encrypted in the typical error message “can not converge”.

An alternative to avoid the “black box” behaviour is to develop analysis methods based on the isogonic approach (Marin 1979). If a solution exists for certain variable it should be found by checking all possible values of that variable. This is the philosophy of the isogonic approach. While searching the solution it is easy to observe if there is one, multiple or no solution, thus given a pertinent answer instead of the typical “can not converge” error message. The price to pay for this unconditional stable strategy is its relative low speed. Based on the isogonic approach, we developed a computerised “graphical method” (GM) for cracking analysis of rectangular reinforced sections. The system (B.3.2) can be rewritten as two unknown functions by solving the two equations expressed in σ_c (the system (B.3.2) is linear in σ_c , if $f_r=0$):

$$\begin{cases} \sum P(y_{NA}, \sigma_c) = 0 \Rightarrow \sigma_{cEq.P} = f(y_{NA}) \\ \sum M_x(y_{NA}, \sigma_c) = 0 \Rightarrow \sigma_{cEq.Mx} = g(y_{NA}) \end{cases} \quad (B.3.11)$$

The solution is found when $f(y_{NA})=g(y_{NA})$. If solutions exist they correspond to pairs (y_{NA}, σ_c) in the $Oy_{NA}\sigma_c$ space. These pairs represent intersection points between the functions/curves f and g . The idea of the graphical method (called GM-Dam in its spreadsheet implementation) is to graphically represent these curves (f and g) and visually identify the intersection point (Figure B.3.4). For rectangular reinforced section subjected to P , M_x and UP the functions f and g have the form:

$$\begin{aligned} \sigma_{cEq.P} &= \frac{2 \cdot (P + u \cdot R_{UP}) \cdot h_{NA}}{b \cdot h_{NA}^2 + 2 \cdot n \cdot S_t + 2 \cdot (n-1) \cdot S_c}, \\ \sigma_{cEq.Mx} &= \frac{6 \cdot (P \cdot (e_y + h/2) + u \cdot R_{UP} \cdot (e_{yRUP} + h/2)) \cdot h_{NA}}{b \cdot (2 \cdot h + y_{NA}) \cdot h_{NA}^2 + 6 \cdot n \cdot I_t + 6 \cdot (n-1) \cdot I_c} \end{aligned} \quad (B.3.12)$$

where $h_{NA} = h - y_{NA}$, $S_k = \sum_i (A_{ski} \cdot y_{ski}) - y_{NA} \cdot \sum_i A_{ski}$, $I_k = \sum_i (A_{ski} \cdot y_{ski}^2) - y_{NA} \cdot \sum_i (A_{ski} \cdot y_{ski})$, $k=t, c$. In eq.

(B.3.12) the indices $_t$ stands for “bar in tension” ($y_s < y_{NA}$) and $_c$ stands for “bar in compression” ($y_s > y_{NA}$); the sum is applied for all bars in tension/compression; all other notations have already been explain above. The steps involved in the method are: (i) consider the section uncracked; if the NA is outside then stop; (ii) select a reasonable number of y_{NA} (100) and for each y_{NA} compute f and g and graphically represents σ_c as function of y_{NA} ; (iii) if on the graphic an intersection between the two curves (f and g) can be identified then visually find that intersection which represent

the solution; if not then no solution is possible (100% cracking, axial resultant is tension, ...). To help the identification of the intersection point each time when an y_{NA} is proposed the GM-Dam evaluates the equilibrium equations (B.3.2); the solution is found when these equations are “numerically” satisfied. Moreover, to accelerate the process, GM-Dam is capable of suggesting iteratively new y_{NA} values when the previous trial value was not the solution. The idea of the “graphical method” is easy to implement in spreadsheet-like software. GM-Dam spreadsheet is offered freely for engineering community by contacting the authors by e-mail (lucian.stefan@polymtl.ca; pierre.leger@polymtl.ca).

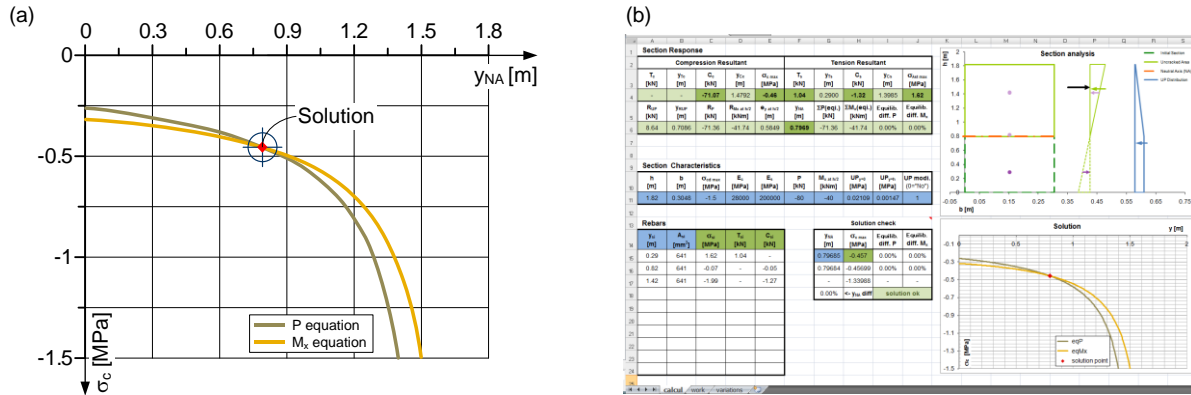


Fig. B.3.4 Computational tool GM-Dam: (a) variation of equilibrium equations, and (b) spreadsheet preview

B.3.5 Small gravity dam exemple

A small reinforced gravity dam (free overflow spillway) located in Québec, Canada is presented as an application of the method presented above for flexural-shear resistance of reinforced section as well as for the computation of sliding safety factors.

B.3.5.1 System Analysed

The geometrical details as well as the water levels for the analysed dam are given in Figure B.3.5(a). The material properties are: $E_c=25500$ MPa, $f'_c=30$ MPa, $\gamma_c=2400$ kg/m³, $A_s=700$ mm², $E_s=200000$ MPa, $f_y=400$ MPa; for shear resistance of the concrete three cases were proposed: (a) $\phi_{case\ 1}=55^\circ$, $c_{case\ 1}=0$ kPa; (b) $\phi_{case\ 2}=45^\circ$, $c_{case\ 2}=0$ kPa; (c) $\phi_{case\ 3}=38^\circ$, $c_{case\ 3}=50$ kPa. Two load cases corresponding to operating level (OL) and flood level (FL) were considered, Figure B.3.5(b). For OL the applied loads are evaluated at: $P=-161.16$ kN, $V=61.26$ kN (shear force), $M_x=11.28$ kNm (with respect to G , Figure B.3.1), $UP_{us}=0.03551$ MPa, $UP_{ds}=0.00608$ MPa, initial UP resultants: $R_{UP}=75.91$ kN, $R_{M_x\ UP}=-32.67$ kNm (the action of u/s and d/s forces are considered for all resultants). Furthermore, for FL the applied loads are evaluated at: $P=-161.16$ kN, $V=87.77$ kN (shear force), $M_x=-35.67$ kNm, $UP_{us}=0.04719$ MPa, $UP_{ds}=0.01776$ MPa, initial UP resultants: $R_{UP}=118.52$ kN, $R_{M_x\ UP}=-32.67$ kNm.

B.3.5.2 Flexural Safety Assessment

To evaluate the flexural resistance of the section we check first if the section is cracked (u/s fiber in tension). The properties of uncracked section are: $A=3.655$ m², $y_g=1.8234$ m, $I_x=4.0594$ m⁴. OL: $e_{y\ RP}=(11.28-32.67)/(-161.16+75.91)=0.251$ m, $C_c=-85.16$ kN, $\sigma_{u/s}=(-161.16+75.91)/3.655+(-161.16+75.91)\cdot(0.251+3.65/2-1.8234)/$

B.3.5.3 Sliding Safety Assessment

The overall shear strength of the section is determined as the sum of the concrete and anchor participation (see B.3.3.3). As previously shown, to remain in the range of small displacements, the anchor shear resistance can be evaluated with the formula: $0.5 \cdot A_s \cdot f_y$. Hence, an appropriate value for V_r is $0.5 \cdot 700 \cdot 400 / 1000 = 140$ kN (A_s can be decreased to account for corrosion); this value for V_r is employed in the following calculations. Moreover, the anchor shear resistance must satisfy all possible failure mechanisms (see B.3.3.1, B.3.3.3).

Note that even when V_r is neglected in eq. (B.3.10) the *flexural response* (cracking analysis) of the section is still obtained with the consideration of the steel anchors, the section being reinforced. The SSF, eq. (B.3.10), are computed for *reinforced section* considering the three options mentioned in 5.1:

- (a) OL (0% cracking): $SSF_{case\ 1} = (85.16 \cdot \tan(55^\circ)) / 61.26 = 1.985$, $SSF_{case\ 2} = (85.16 \cdot \tan(45^\circ)) / 61.26 = 1.390$, and $SSF_{case\ 3} = (85.16 \cdot \tan(38^\circ) + 50 \cdot 3.65) / 61.26 = 4.065$. The participation of the anchor (V_r) was neglected in eq. (B.3.10) to show that the concrete alone provide enough resistance against sliding. These SSF are practically the same for unreinforced section as the entire section is in compression.
- (b) FL (96.5% cracking): $SSF_{case\ 1} = (9.22 \cdot \tan(55^\circ) + 140) / 87.77 = 1.745$, $SSF_{case\ 2} = (9.22 \cdot \tan(45^\circ) + 140) / 87.77 = 1.700$, $SSF_{case\ 3} = (9.22 \cdot \tan(38^\circ) + 50 \cdot (3.65 - 3.523) + 140) / 87.77 = 1.749$. For the unreinforced section and FL the SSF can not be computed because no flexural solution is possible.
- (c) FL (96.5% cracking), if V_r is neglected in eq. (B.3.10): $SSF_{case\ 1} = 0.150$, $SSF_{case\ 2} = 0.105$, $SSF_{case\ 3} = 0.154$ which shows the amount of anchor participation to overall shear resistance.

From CDA guidelines (2007) the SSF for residual shear strength in case of flood is 1.1 while the SSF required using peak strength values is 1.3. It is thus concluded that the dam analysed is adequate for the loading conditions considered. The amount of displacements required to move from the peak concrete shear strength to residual shear strength is very small and that should be kept in mind while interpreting the results (for example, transition taking place between 0.1 mm peak shear strength to 1 mm residual shear strength).

B.3.5.4 Case of multiple anchors

The robust solution strategy proposed using the solution of equilibrium equations in terms of forces implemented in GM-Dam is able to tackle the problem of multiple-anchors along the same line of action. The flexural response is computed using the same basic assumptions as for the single anchor case. If one compare the solutions between a “one-anchor” (near the u/s face) section analysis and a “two-anchors” section analysis, the center of gravity of the tensile resultant is moving downstream reducing the lever arm with the compression zone. Thus, the compressive stress in the concrete in the “two-anchors” case will be larger than in the “one-anchor” case, as well as the corresponding frictional force. The anchor shear force for the case “one-anchor”, will be greater than the sum of the anchor shear forces for the case “two-anchors” because in the later case the concrete contribution to the shear resistance is more important. The shear force induced in each anchor should be approximately equal assuming a fairly rigid system with two anchor shear springs in parallel (experiencing the same displacement). Further studies using finite element and distinct element methods must be performed to confirm these observations; they should

consider: (a) explicitly equilibrium, (b) relative stiffness (axial, shear) of the anchors and the concrete zone in compression, and (c) failure criterion (Mohr-Coulomb friction model) of the material (steel concrete-rock interface). In this case deformations and displacements will be explicitly computed leading to the distribution of forces among anchors themselves and among the compressed concrete.

It is not believed that actual instrumentation of an existing dam with passive anchors could lead to significant advances in the evaluation of the maximum strength that could be mobilized and related failure mechanisms. It can be useful to obtain data while ice loads are acting on the dam. To study the shear distribution among concrete and anchors as well as the load-deformation response of small dams with passive anchors, laboratory experiments on dam specimens that could be brought to failure will be much more useful.

B.3.6 Conclusions

This paper presented the magnitude and distribution of internal shear, tensile, compressive forces that develop in small gravity dams with passive steel anchor reinforcement. An extension of the gravity method using reinforced concrete working stress design concept was used to obtain a solution that is in equilibrium considering uplift pressures, respect the compatibility of deformations, and follow a no-tension material laws. It was found that:

- (1) Tensile forces developed in the anchors are small as compared to their tensile strength. The tensile forces are mainly resisting the bending moment due to hydrostatic loads. They also allow developing additional compressive force that helps resisting the applied shear force by enhanced concrete friction.
- (2) Anchors allow the force resultant to be located outside of section without compromising the structural safety. The criterion for position of the resultant for unreinforced dam is not applicable to dams with passive anchors.
- (3) A methodology was proposed to include a contribution of the anchor to the shear resistance of the section. It is based on the hypothesis that no significant shear displacements is to take place.

There is a wide interest to develop efficient and robust tools for computation of safety indicators and strength evaluation of lightly reinforced hydraulic structures. The proposed methodology is very useful for practical engineers as it offers an accessible approach for the rational consideration of reinforcement bars in existing/repared or new hydraulic structures. A decision can be made based on safety factors computed for plain and lightly reinforced structure, because the amount of participation of the steel bars to the structural overall strength is clearly quantified. The cracking analysis described above has been integrated in a spreadsheet tool that is made freely available for the profession.

B.3.7 Acknowledgements

The authors wish to acknowledge the financial support provided by the Fond Québécois sur la Recherche en Nature et Technologie (FQRNT), the National Science and Engineering Research Council of Canada (NSERC) and to thank the Centre d'expertise hydrique du Québec (CEHQ) for the technical support. The authors also wish to thank Mr. Eduardo Bretas from Laboratory National Engineering Civil (LNEC) for useful discussions and collaborations while

conducting this project.

B.3.8 Appendix

The coefficients of third degree equation (B.3.4) for finding analytically the NA position of rectangular reinforced section are (for symbol definitions see B.3.3.2 and Figure B.3.1):

$$C_1 = (k_u + k_d + v \cdot (k_u - k_d + 2 \cdot k_{ua} - 2 \cdot k_{da})) \cdot b \quad (\text{B.3.A1})$$

$$C_2 = -(6 \cdot e_y + h \cdot (2 \cdot k_d + k_u) + v \cdot (2 \cdot h \cdot (k_u - k_d - k_{ua} + k_{da}) + 8 \cdot y_s \cdot (k_{ua} - k_{da}))) \cdot b \quad (\text{B.3.A2})$$

$$C_3 = 12 \cdot b \cdot h \cdot e_y + 6 \cdot (2 \cdot e_y - 2 \cdot y_s + h) \cdot n \cdot A_s - b \cdot h \cdot (h \cdot (k_u - k_d - 2 \cdot k_{ua} - 4 \cdot k_{da}) + 6 \cdot y_s \cdot (k_{ua} + k_{da})) + \\ + v \cdot (h^2 \cdot (k_u - k_d) + (6 \cdot y_s^2 - 2 \cdot h \cdot y_s) \cdot (k_{ua} - k_{da})) \cdot b \quad (\text{B.3.A3})$$

$$C_4 = -6 \cdot b \cdot h^2 \cdot e_y - (12 \cdot (e_y - y_s) + 2 \cdot h \cdot (k_u + 2 \cdot k_d)) \cdot n \cdot A_s \cdot y_s + (6 \cdot y_s^2 \cdot (k_{ua} + k_{da}) + h^2 \cdot k_u) \cdot b \cdot h \quad (\text{B.3.A4})$$

B.3.9 References

ASTM 2004 - American Society for Testing and Materials, A 615/A 615M - Standard specification for deformed and plain carbon steel bars for concrete reinforcement, USA.

Azuar, M.M., Debreuille, Habib, Londe, Panet, Rochet, and Salembier, 1979. "Le renforcement des massifs rocheux par armatures passives (Reinforcement of rock mass using passive anchors)", *Proc., 4th International Society for Rock Mechanics Congress*, Vol.1: pp 23-30.

Bjurstrom, S., 1974. "Shear strength of hard rock joints reinforced by grouted untensioned bolts", *Proc., 3rd International Society for Rock Mechanics Congress*, Vol.2(B): pp 1194-1199.

CDA 2007 - Canadian Dam Association, Dam safety guidelines, Edmonton, Canada.

CISC 2004 - Canadian Institute of Steel Construction, "Part One: CAN/CSA S16-01 - Limit states design of steel structures" in *Handbook of steel construction*, Quadratone Graphics Ltd., Canada.

CSA 2004 - Canadian Standards Association, Standard A23.3-04 - Design of concrete structures, Mississauga, Canada.

Cheng, R., 1996. *Design of concrete structures for retaining aqueous liquids*: Thomas Telford Publishing, London, UK.

FERC 1997 - Federal Energy Regulatory Commission, "Chapter 10: Other dams" in *Engineering guidelines for the evaluation of hydropower projects*, Dept. of Energy, Washington, D.C.

Haas, C.J., 1976. "Shear resistance of rock bolts", *Transactions Society of Mining Engineering (AIME)*, Vol.260(1): pp 32-41.

Lorig, L.J., 1985. "A simple numerical representation of fully bonded passive rock reinforcement for hard rocks", *Computers and Geotechnics*, Vol.1(2): pp 79-97.

Marin, J., 1979. "Design aids for L-shaped reinforced concrete columns", *ACI Journal*, Vol.76(11): pp 1197-1216.

Pells, P.J.N., 1974. "The behavior of fully bonded rock bolts", *Proc., 3rd International Society for Rock Mechanics Congress*, Vol.2(B): pp 1212-1217.

St. John, C.M., and Van Dillen, D.E., 1983. "Rock bolts: A new numerical representation and its application in tunnel design", *Proc., 24th US Symposium on Rock Mechanics*, Texas, USA, Vol.: pp 13-25.

Stefan, L., and Léger, P., 2010. "Multi-criteria capacity envelopes for biaxial bending of concrete hydraulic structures", *ASCE Journal of Structural Engineering*, in press.

Stefan, L., and Léger, P., 2008. "Extension of the gravity method for 3D cracking analysis of spillway piers including uplift pressures", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol.134(8): pp 1278-1287.

USACE 2005 - U.S. Army Corps of Engineers, Engineering and design: Stability analysis of concrete structures - Rep. EM 1110-2-2100, Washington, D.C.

UDEC (Universal Distinct Element Code), 2004. *User's Manual*: Itasca Consulting Group Inc., Minnesota, USA.

Wang, C.K., Salmon, C.G., and Pincheira, J.A., 2007. "Chapter 4: Rectangular sections in bending under service load conditions" in *Reinforced Concrete Design*: John Wiley & Sons, Inc., USA, 7th Ed., pp 95-117.

Wyllie, D.C., 1999. *Foundation on rock*: E&FN Spon, London and New-York, 2nd Ed..

Ziari, A., and Kianoush, M.R., 2009. "Investigation of flexural cracking and leakage in RC elements", *Journal of Engineering Structures*, Vol.31(1): pp 1056-1067.